

DOKTORI DISSZERTÁCIÓ

TÉZISFÜZET

Nemlineáris dinamikus rendszerek analízise és
irányítása korszerű számítási módszerekkel

Szerző:

Csutak Balázs

Témavezető:

Dr. Szederkényi Gábor, DSc



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
Roska Tamás Műszaki és Természettudományi Doktori Iskola
2025

1. Bevezetés

A dinamikus rendszerek elméletét széles körben alkalmazzák különböző természeti jelenségek leírására, legyen szó fizikai, mechanikai, biológiai, kémiai, vagy akár társadalmi folyamatokról. Ennek következtében kialakult egy általános, önálló, erős matematikai alapokon nyugvó tudományterület, kiterjedt szakirodalommal ezen modellek elemzésére, szintézisére, megfigyelésére és irányítására. Ez a terület még mindig számos nyitott kérdést tartogat: a legtöbb ismert elméleti eredmény csupán a nemlineáris rendszerek egy jól definiált részhalmazára vagy (al)osztályára alkalmazható, melyek matematikai struktúrája gyakran túl bonyolult az analitikus megoldásokhoz. Ugyanakkor, a közelmúltban megjelent modern hardverek és új számítási módszertanok gyakran lehetőséget adnak a korábban magas számításgényük miatt nem kezelhető numerikus problémák megoldására elfogadható időkereten belül.

Jelen dolgozat ilyen új számítási módszerek alkalmazásait vizsgálja nemnegatív rendszerek megfigyelésére, irányítására és paramétereinek szintézisére, különös hangsúlyt fektetve a kompartmentális járványmodellekre, melyek a közelmúltbeli COVID-19 világjárvány során a korábbiaknál nagyobb jelentőségre tettek szert.

A járványtanban bevett gyakorlat, hogy matematikai modelleket alkalmaznak a betegségek terjedése elleni stratégiák kiértékelésére. A populációszintű determinisztikus járványmodelleket leggyakrabban nemnegatív, kompartmentális formában írják fel, ahol a fertőzési mechanizmust polinomiális nemlinearitások reprezentálják. A modelleket rendszerint a fogékony – (látens) – fertőzött – gyógyult (SEIR) típusú leírásból származtatják [1], és közönséges differenciálegyenletek (ODE) formájában adják meg. A nemlinearitás következtében a kapcsolódó irányítási problémák komoly kihívást jelentenek: a bonyolult dinamika, a lehetséges szingularitások, valamint az olyan alapvető tulajdonságok állapotfüggő jellege miatt, mint az elérhetőség vagy megfigyelhetőség [2].

A COVID-19 járvány abból a szempontból példátlan volt, hogy a döntéshozó szervezeteknek folyamatosan módosítaniuk és finomhangolniuk kellett a járványra adott válaszaikat, próbálva egyensúlyt találni a közegészség-

ügyi elvárások valamint a védekezésésként bevezetett különböző távolságtartási intézkedések társadalmi és gazdasági költségei között [3]. Ilyen összetett, időben változó feltételek specifikálására kínálnak hatékony eszközt a temporális logika és egyéb hasonló formális módszerek [4], lehetőséget nyújtva ezen követelmények egyenlőtlenségrendszerre való algoritmikus átalakítására is [5]. A modell-prediktív irányítás (MPC) pedig kézenfekvő megközelítés az optimális megoldás kiszámítására nemlineáris rendszerek esetén, mely képes kezelni az összetett, gyakran ellentmondásos célokat és betartandó korlátozásokat [6]. A módszer lehetőséget ad további bemenektek – például az oltások vagy tesztelés intenzitása – meghatározására is, melyekkel jelentősen csökkenthető lehet a társadalmi távolságtartás jellegű intézkedések szigorúsága [7].

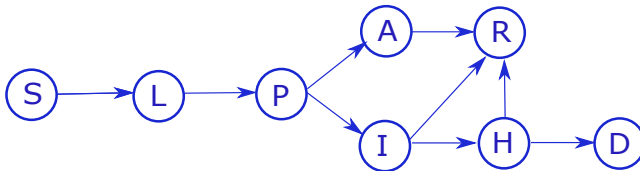
A legtöbb irányítási algoritmus számára folyamatosan szükséges a célrendszer állapotának teljes és pontos ismerete, ami járványkezelés esetén – például a lappangó vagy tünetmentes fertőzöttek számát illetően – nem egy reális feltételezés. Ehhez hasonló mennyiségek becslésére statisztikai módszerek és modellalapú megközelítések is léteznek [8]. Egy lehetséges megoldás a rekonstrukciós probléma irányítási feladattá történő átalakítása, amikor a modell kimenetével egy megbízhatóan mérhető mennyiséget (például a kórházba utalt betegek számát) próbálunk követni. Az így nyert probléma kezelhető sztochasztikus MPC vagy egyéb, állapotbecslővel kombinált robusztus szabályozási eljárás segítségével is.

A nemnegatív rendszerek egy másik fontos osztályát képezik a kinetikus modellek, melyek dinamikája formálisan kémiai reakciókkal írható le, adott reakciósebességek feltételezése mellett. A jól megalapozott matematikai háttérnek köszönhetően gyakran előnyös ezt a keretrendszert alkalmazni eredendően nem kémiai, de ilyen formára átírható modellek esetében is [9]. Az előre definiált kvalitatív viselkedést (például tartós kémiai oszcilláció fennállását) garantáló paraméterek megkeresése ilyen modellekhez jól ismert probléma, széleskörű alkalmazási lehetőségekkel. Nem meglepő módon a hagyományos módszerekkel ez nehezen érhető el [10], ugyanakkor az optimalizáláson alapuló megközelítések esetenként elfogadható megoldást nyújthatnak.

2. Alapfogalmak és módszertani háttér

2.1. Kompartmentális járványmodellek

A kompartmentális járványmodellek a populációt diszjunkt csoportokra osztják attól függően, hogy az adott egyén milyen állapotban van és milyen szerepet játszik a kórokozó terjesztésében. Munkánk során a COVID-19 járvány egy nyolc csoportból álló modelljének különböző változatait használtuk, amely a 1. ábrán látható. Ez a jól ismert SIR (SEIR) típusú modellek kibővített változata, mely az alábbi csoportokat tartalmazza: **S** – fogékony, **L** – lappangó, **P** – még tünetmentes, már fertőző, **I** – diagnosztizált fertőzött, **A** – tünetmentes fertőzött, **H** – kórházi kezelés alatt, **R** – gyógyult, **D** – elhunyt.



1. ábra. Az összetett nemlineáris járványmodell állapotátmenetei

Általánosan alkalmazott mérőszám egy kórokozó terjedési sebességére – és ennek megfelelően a (javasolt) beavatkozások szigorúságának megítélésére – az időfüggő reprodukciós szám. Ez azt mutatja, hogy egy fertőzött személy adott időpillanatban átlagosan hány másik egyént fertőz meg, és az alapmodell esetén a következőképpen számítható:

$$R_c(t) = \beta (1 - u(t)) \frac{S(t)}{N} \left(\frac{1}{p} + \frac{q}{\rho_I} + \frac{\delta(1-q)}{\rho_A} \right), \quad (1)$$

ahol $\beta, p, \rho_I, \rho_A, q, \delta$ a terjedési rátát, a fertőzés valószínűségét, illetve az egyes csoportok relatív fertőzőképességét mutató paraméterek.

2.2. Modell-prediktív irányítás

A modell-prediktív irányítás egy diszkrét dinamikus modellt feltételez:

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k). \quad (2)$$

A k időpillanatban a módszer egy véges, M hosszúságú időhorizonton fejezi ki a jövőbeli állapotokat ($\mathbf{x}_k = \{x_{k+1|k}, \dots, x_{k+M|k}\}$), a (még ismeretlen) jövőbeli bemenetek ($\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}, \dots, u_{k+M-1|k}\}$) függvényében. Ezt követően ezen jövőbeli állapot- és bemenetsorozat költségfüggvényét, $J(\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k)$ minimalizálva keresi az optimális irányítási lépéseket, megoldva az alábbi korlátozott optimalizálási problémát:

$$\min_{\mathbf{u}_k} J(\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k) \quad (3a)$$

$$\text{w.r.t. } x_{k+i+1|k} = F(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}) \quad (3b)$$

$$G_x(\mathbf{x}_k) \leq h_x, \quad G_u(\mathbf{u}_k) \leq h_u \quad (3c)$$

Itt a (3b) biztosítja a modell által előírt dinamikus viselkedést, míg a (3c) tartalmazza az állapotra és bemenetre vonatkozó megszorításokat. Az MPC-t általában visszacsatolással együtt alkalmazzák, azaz a problémát periodikusan újra megoldják, ún. zsugorodó (rögzített végpont) vagy gördülő időhorizont mellett.

2.3. Feedback-linearizálás

A feedback-linearizálás célja nemlineáris input-affin rendszerek linearizálása egy állapotfüggő nemlineáris visszacsatolás segítségével. Legegyszerűbb esetben kiindulva egy alábbihoz hasonló folytonos modellből,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4a)$$

$$y = h(x), \quad (4b)$$

(ahol f, g a szükséges alkalommal folytonosan deriválható függvények) az y kimenet (f, g Lie-deriváltjai és a rendszer ρ relatív foka segítségével kifejezhető) deriváltjaival meghatározza az alábbi állapottranszformációt:

$$z = \Phi(x) = \left(y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)} \right)^T = \left(h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{\rho-1} h(x) \right)^T \quad (5)$$

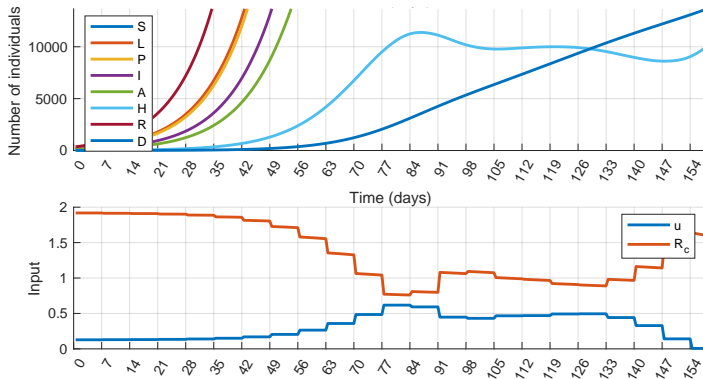
Az $u = a(x) + b(x)v$ állapotfüggő visszacsatolás alkalmazásával elérhető, hogy a zárt kör egy $\dot{z} = Az + Bv$ formában írható lineáris integrátor-sorként viselkedjen a v új bemenet és y kimenet közt, melyre tetszőleges lineáris szabályozási technika (pl. pólusát helyezés, LQR) alkalmazható az elérni kívánt viselkedés (pl. stabilitás, referenciakövetés) érdekében.

3. Fontosabb eredmények összefoglalása

3.1. Optimális járványszabályozás

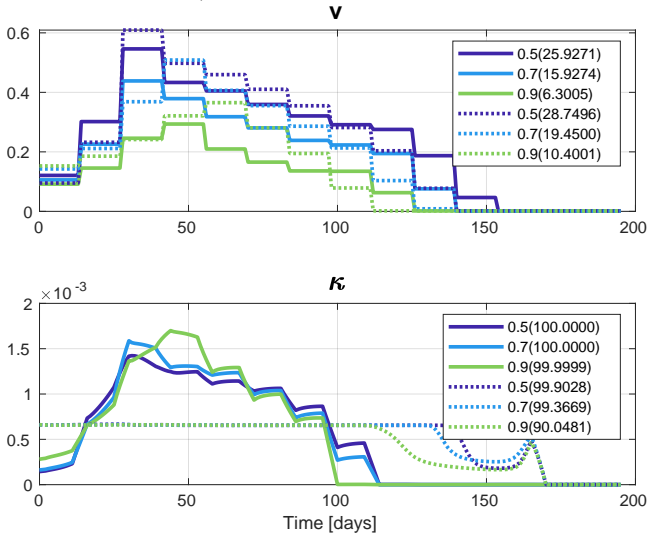
Az optimális járványszabályozás első lépése a költségfüggvény meghatározása, mely a választott beavatkozás és az elért rendszerviselkedés *jóságát* méri. A különböző szempontok (pl. gazdasági károk, halálozások száma) súlya ezen költségben fogja meghatározni az eredményként kapott stratégia természetét. Ennek eredménye lehet az ún. *elfojtás* (azaz a reprodukciós szám 1 alá csökkentése és a járvány megszüntetése) vagy *csillapítás* (azaz a fertőzöttek számának tolerálható, pl. kórházi kapacitást nem túlhaladó szinten tartása).

Példaként, a 2. ábra mutatja a gazdasági károk csökkentését célzó költségfüggvénnyel kapott bemeneteket, a kórházi férőhelyek szigorú felső korlátozása (10.000 fő) mellett. Az algoritmus egyetlen, legfeljebb 21 nap hosszú, tetszőlegesen időzített intervallumban felhasználható további 5000 főnyi, ideiglenesen felszabadítható kórházi kapacitást, amikor azt a legelőnyösebbnek tartotta. Gyakorlati megfontolásból a beavatkozás időpontja csupán hetente egyszer volt változtatható. A kapott eredmény megfelel egy optimális csillapítási stratégiának, ahol a korlátozások feloldása - az időhorizont végén látható módon - egy új járványhullám kezdetét vonja maga után.



2. ábra. A szimulált trajektória (fent) és a számított bemenet (lent), a gazdasági károk csökkentését célzó költségfüggvény és ideiglenesen bővíthető kórházi kapacitás mellett.

Az alternatív beavatkozások (pl. oltás és tünetalapú tesztelés) jelentősen csökkenthetik a távolságtartási intézkedések szükséges szigorúságát. A 3. ábrán látható esettanulmány a szükséges beavatkozás mértékét (v) és a korlátozott mennyiségben rendelkezésre álló tesztek optimális időbeli elosztását (κ) hasonlítja össze különböző hatékonyságú oltások mellett (kül. színek). Enyhén más eredményt kapunk korlátozott tesztelési kapacitás mellett (pontozott görbék).



3. ábra. A minimálisan szükséges beavatkozás mértéke (fent) és a korlátozott mennyiségben rendelkezésre álló tesztek optimális időbeli elosztása (lent) különböző hatékonyságú oltások mellett, a kórházi kapacitásra vonatkozó korlátok betartása érdekében. Az esettanulmányok beavatkozási költségei (fent) illetve az elhasznált tesztek százalékos aránya (lent) a görbefulatok után, zárójelben láthatóak.

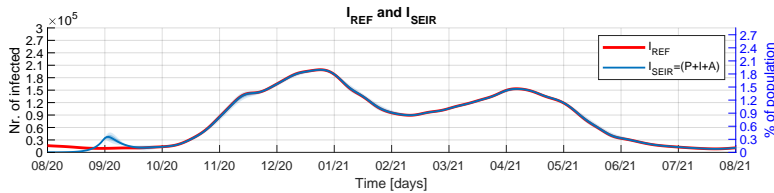
3.2. Robusztus járványadat-rekonstrukció

A munka során sztochasztikus MPC-t és robusztus feedback-linearizációs megoldást is használtunk historikus járványadatok modell-alapú rekonstrukciójához, irányítási feladatra írva át a becslési problémát. A számításokat kizárólag a kórházba felvett fertőzöttek száma alapján végeztük, mely a legtöbb fejlett országban naponta frissítve, nyilvánosan elérhető volt. A kórházi adminisztratív eljárások jellegéből fakadóan az adatsorok tartalmaztak pontatlanságokat, és jelentős mértékű előfeldolgozást igényel-

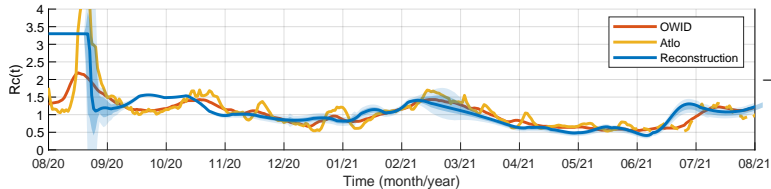
tek (pl. mozgóátlag, spline-interpoláció) hogy teljesítsék a szabályozáshoz szükséges matematikai feltételeket.

A 2.3. rész (5) egyenletét egy extra integrátorral kibővítve jelentősen növelhető a feedback-linearizálás modell- és paramétereltérésekkel szemben mutatott robusztussága. Ezt illusztrálandó, különböző modellt használtunk a szabályozótervezéshez és a szimulációhoz. A még realiztikusabb összeállítás érdekében kiterjesztett Kalman-szűrőt (EKF) használtunk a szimulációs modell állapotainak valós idejű becslésére, és csupán a becsült állapotokat alkalmaztuk a visszacsatoláshoz. Több szimulációt végeztünk, rácsszerűen variálva a különböző paraméterek eltérését 10% – 300% között, vizsgálva a megoldás stabilitási régióját és a kapott eredmények szórását.

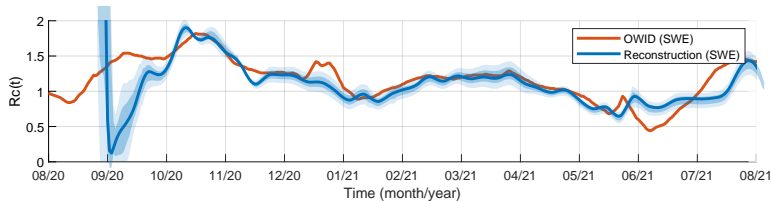
A 4a. ábra mutatja a referenciajelet és a 0. szabályozási beállítás (eltérő paraméterek, de ismert szimulációs rendszerállapot) szimulált kimenetét. A kezdeti tranzienst időszak után az aszimptotikus referenciakövetés alig



(a) Referenciakövetés pontossága (átlag és 2σ szórás) eltérő modellek mellett, EKF nélkül



(b) Magyarországra becsült $R_c(t)$, összehasonlítva független irodalmi forrásokkal



(c) Svédországra becsült $R_c(t)$, összehasonlítva független irodalmi forrásokkal

4. ábra. A robusztus szabályzó referenciakövetési és rekonstrukciós teljesítménye

észrevehető követési hibát és szórást mutatott, a szabályzó pedig jelentős paraméterhiba mellett is végig stabil maradt.

Ugyancsak a 4. ábra mutatja a becsült időfüggő reprodukciós számot (2.1 rész,1) magyarországi (4b) és svédországi (4c) adatok alapján. Mivel ezek a 2. beállítás (EKF-el becsült szimulációs modellállapotok) eredményei, a számított bemenet nagyobb szórást mutat, de sokkal inkább valós képet nyújt a járvány terjedéséről a kezdeti tranzienszt leszámítva. Összehasonlításként az ábrák két független kutatás eredményeit is tartalmazzák.

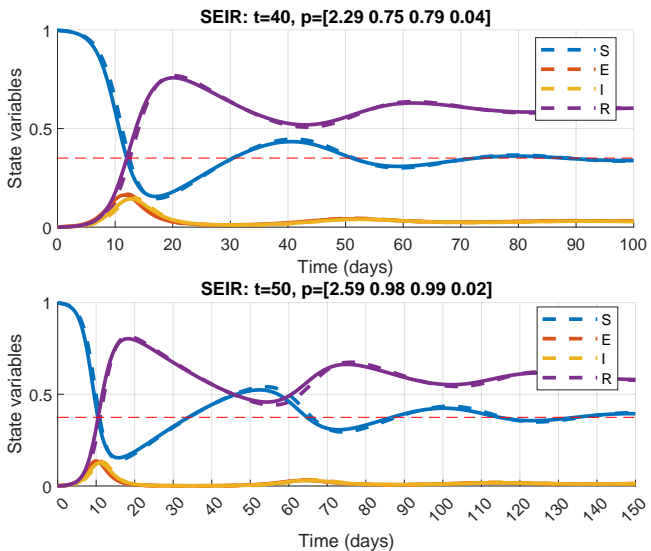
3.3. Nemnegatív rendszerek paraméterszintézise

Ebben a fejezetben kívánt kvalitatív dinamikus tulajdonságokat biztosító paramétereket keresünk, olyan nemlineáris optimalizálási problémát felírva, melyben ezek a paraméterek is döntési változók. MPC-szerű megközelítést alkalmazva, a paraméterek mellett egy véges M -hosszú időhorizonton a jövőbeli rendszerállapotokat is változónak tekintjük, és korlátozások formájában építjük be a modell által előírt dinamikát. Ugyancsak korlátozások formájában specifikáljuk a kívánt kvalitatív viselkedést. Oszcillációk biztosításához kézenfekvő módon felírható, hogy az egyes állapotok trajektóriája periodikusan egy (korlátok közt) szabadon választott szint fölé és alá kell kerüljön. Ez egyszerűen kifejezhető a temporális logika operátorai segítségével, vagy felírható akár manuálisan is, az értekezésben látható módon. Ahogy az MPC esetén is, definiálható költségfüggvény egy preferált, legjobb megoldás kiválasztására, de jelen alkalmazásban többnyire bármelyik fizibilis megoldás megtalálása elégséges.

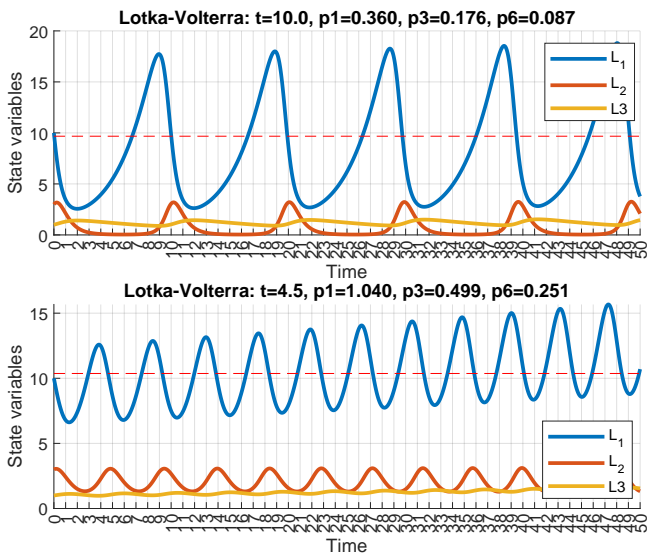
Az értekezés három, egyre bonyolódó esettanulmányt mutat be. A 5. ábrán egy időinvariáns (rögzített paraméterek, nincs szезonalitás) SEIR(S) típusú járványmodell látható, mely időben csökkenő immunitás esetén képes oszcilláló viselkedést mutatni. A fenti módszer képes megtalálni a kívánt frekvenciát és amplitúdót eredményező paramétereket.

A 6. ábrán egy három fajra felírt Lotka-Volterra tápláléklánc-modell kimenete látható. A számított paraméterekkel biztosítható az előírt frekvencia és választott fajok szaporodása, fennmaradása vagy kihalása is.

A dolgozat még egy Brussellator modellt is tartalmaz validáció céljából.



5. ábra. A SEIR(S) modell tervezett (szaggatott) és tényleges (folytonos) trajektóriái. Az előírt periódus és a kapott paraméterek az ábra fölött láthatóak.



6. ábra. A Lotka-Volterra paraméterei és trajektóriái. A modell (hozzávetőlegesen) teljesíti a frekvenciára/periódusra vonatkozó, a címében látható előírást.

4. Új tudományos eredmények

1. Tézis Kidolgoztam egy modell-prediktív irányításon alapuló módszert nemlineáris kompartmentális járványmodellek optimális irányítására, mely képes diszkrét beavatkozási szintek és intervallumok kezelésére összetett, temporális logika segítségével leírt korlátozások mellett.

1.1. Tézispont Kifejlesztettem egy nemlineáris, modell-prediktív irányításon alapuló módszert járványkezelési intézkedések szükséges szintjének meghatározására, mely képes garantálni összetett, időfüggő logikai feltételek teljesülését, esetenként ellentmondásos elvárások és célok közt egyensúlyozva.

Publikáció: [J1]

1.2. Tézispont Javasoltam egy irányításelméleti megközelítést a nemgyógyászati beavatkozások, oltások és tesztelési intenzitás integrált tervezésére, új manipulálható bemeneteket és csoportokat illesztve komplex járványmodellekbe. Figyelembe véve az elérhető erőforrások korlátaikat és az összetett logikai elvárásokat, az optimális szabályzó képes átfogó stratégiát kiszámítani a különböző intézkedések megfelelő időben és mértékben történő alkalmazására.

Publikáció: [J2]

Kapcsolódó fejezetek: 3 (disszertáció), 3.1 (tézisfüzet)

2. Tézis Újszerű módszereket dolgoztam ki nemlineáris nemnegatív rendszerek retrospektív trajektória-rekonstrukciójára és paramétereinek szintézisére, determinisztikus és sztochasztikus modell-prediktív irányítás által inspirált módon formált összetett optimalizációs problémák megoldásán keresztül.

2.1 Tézispont Optimalizáción alapuló determinisztikus és sztochasztikus módszereket javasoltam járványfolyamatok nem mérhető mennyiségeinek becslésére, hibabecslésekkel együtt. Ezek használatával pontos közelítéseket adtam az időben változó terjedési rátára, a valószínűsíthető tényleges fertőzésszámra, valamint a lappangó, tüneteket még nem

mutató és tünetmentes esetek számára, kizárólag a napi kórházi felvételek számára alapozva.

Publikációk: [C1], [J3]

Kapcsolódó fejezetek: 4.1 (disszertáció), 3.2 (tézisfüzet)

2.2 Tézispont Újszerű, optimalizáción alapuló módszert javasoltam nemlineáris, nemnegatív rendszerek előre meghatározott kvalitatív viselkedést biztosító paramétereinek szintézisére. A módszert három kinetikus modellen demonstráltam, adott frekvenciájú tartós vagy csillapított autonóm oszcilláció kiváltásának céljával.

Publikáció: [J4]

Kapcsolódó fejezetek: 5 (disszertáció), 3.3 (tézisfüzet)

3. Tézis Kidolgoztam egy robusztus, számítási szempontból hatékony módszert járványfolyamatok historikus adatainak rekonstrukciójára, robusztussá tett feedback-linearizáción alapuló aszimptotikus referenciakövetést kombinálva nemlineáris állapotbecsléssel. A kialakított rendszer megfelelő robusztusságot mutatott a modellstruktúrában, a becsült modellparaméterekben és a mért kimeneti adatokban jelentkező eltérésekkel és pontatlanságokkal szemben.

Publikációk: [C2], [C3], [C4], [C5], [J5]

Kapcsolódó fejezetek: 4.2 (disszertáció), 3.2 (tézisfüzet)

5. Alkalmazások és jövőbeli irányok

Mivel a kidolgozott módszertanok a nemnegatív rendszerek egy széles osztályára alkalmazhatóak, számos közvetlen gyakorlati felhasználási lehetőség létezik. A bemutatott megközelítések közül néhányat tulajdonképpen már alkalmaztunk is a gyakorlatban, valós adatrekonstrukciós igények ki-elégítésére.

A COVID-19 világjárvány idején a bemutatott keretrendszert használtuk Magyarországon a nem mérhető kategóriákba tartozó egyének (pl. lapangó és tünetmentes fertőzöttek) számának rendszeres becslésére, betekintést nyújtva az adott járványhullám alakulásába. Ezek alapján pontos előrejelzéseket is készítettünk. Eredményeink mindig összevethetőek voltak

(sőt, időnként jobban használhatóak is) a független kutatócsoportok által közzétett adatokkal illetve adatoknál (pl. [11, 12]).

A modell- és paraméterhibák tolerálását célzó, a feedback-linearizálás robusztusabbá tételére irányuló kutatásunk megalapozta a kompartmentális modelleken alapuló járványszabályozás, valamint az ágens-alapú modellezés és szimuláció későbbi összekapcsolását [13]. Ez a realiztikus, hibrid megközelítés egy újabb járvány esetén (a paraméterek az új kórokozó terjedéséhez és viselkedéséhez való igazítása után) különösebb módosítás nélkül alkalmazható, segítve a döntéshozókat a járványkezelési célok és beavatkozási költségek közti egyensúlyozásban a gyorsan változó helyzetben.

Végül, mivel a kémiai oszcillátorok alapvető szerepet játszanak számos biológiai folyamatban (pl. cirkadián ritmus, időfüggő sejt-döntések élő szervezetekben), ezek előre meghatározott frekvenciával és viselkedéssel történő szintetizálása számos (sejt)biológiai és orvosi kutatási területen használható, vagy legalább gondolatébresztő lehet.

Számos érdekes kutatási irány maradt még a jövőre nézve is:

1. Az ODE-alapú és az ágens-alapú modellek közti kapcsolat tovább finomítható a valós beavatkozások (pl. iskolabezárás) és a kívánt szigorúság közti hozzárendelés optimalizálásával. A több bemenetet (pl. tesztelési intenzitás, oltás) támogató szabályozó beágyazásával a hibrid rendszerbe minden eddiginél realiztikusabb és átfogóbb járványkezelési stratégiák kidolgozása is megoldható lenne.
2. A robusztus szabályozók és az ágens-alapú modellek összekapcsolása számítási szempontból is hatékony tervezési megoldást nyújthat különböző mechanikai vagy ökológiai rendszerek esetében (pl. populációdinamika, forgalomszabályozás). Korábban végeztünk már kutatást optimális járműütemezés és irányítás terén [O1, O2] - a jelen dolgozatban ismertetett eredmények ott is érdekes alkalmazási lehetőségeket rejthetnek.
3. Mivel a kinetikus modellek számos folyamat leírására alkalmasak, a paraméterszintézis módszerének alkalmazása riboszómaáramlási modellekre is ígéretes kutatási irányoknak tűnik.

A szerző publikációi

Folyóiratcikkek

- [J1] T. Péni, B. Csutak, G. Szederkényi, and G. Röst, „Nonlinear model predictive control with logic constraints for COVID-19 management,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 102, no. 4, pp. 1965–1986, Dec. 2020, SJR: **Q1 / D1**.
- [J2] T. Péni, B. Csutak, F. A. Bartha, G. Röst, and G. Szederkényi, „Optimizing symptom based testing strategies for pandemic mitigation,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 84 934–84 945, 2022, SJR: **Q1**.
- [J3] P. Polcz, B. Csutak, and G. Szederkényi, „Reconstruction of epidemiological data in Hungary using stochastic model predictive control,” *Applied Sciences*, vol. 12, no. 3, p. 1113, 2022, SJR: **Q2**. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2076-3417/12/3/1113>
- [J4] B. Csutak and G. Szederkényi, „Optimization-based parameter computation for nonnegative systems to achieve prescribed dynamic behaviour,” *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 21, no. 10, pp. 457–474, 2024, SJR: **Q2**.
- [J5] B. Csutak and G. Szederkényi, „Robust control and data reconstruction for nonlinear epidemiological models using feedback linearization and state estimation,” *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 22, no. 1, pp. 109–137, 2025, SJR: **Q2**.

Konferenciatickek és kiadványok

- [C1] B. Csutak, P. Polcz, and G. Szederkényi, „Computation of COVID-19 epidemiological data in Hungary using dynamic model inversion,” in *2021 IEEE 15th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)*. IEEE, 2021, pp. 91–96.

- [C2] B. Csutak, P. Polcz, and G. Szederkényi, „Model-based epidemic data reconstruction using feedback linearization,” in *2022 International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICE-CET)*, 2022, pp. 1–6.
- [C3] B. Csutak, K. M. Jenei, and G. Szederkényi, „Linearization based robust reference tracking control of a compartmental epidemiological model,” in *2023 24th International Conference on Process Control (PC)*, 2023, pp. 66–71.
- [C4] B. Csutak and G. Szederkényi, „Reference tracking control of a non-linear epidemiological model with state estimation,” in *2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 2023, pp. 2311–2316.
- [C5] B. Csutak, P. Polcz, and G. Szederkényi, „Magyarországi járványadatok elemzése rendszerelméleti megközelítéssel,” *XXXIV. Neumann Kollokvium*, 2021.

Egyéb konferenciatickek és kiadványok

- [O1] B. Csutak, T. Péni, and G. Szederkényi, „An optimization based algorithm for conflict-free navigation of autonomous guided vehicles,” in *Proceedings of the Pannonian Conference on Advances in Information Technology (PCIT'2019)*. Veszprém: University of Pannonia, Faculty of Information Technology, 2019, pp. 90–97. [Online]. Available: <https://eprints.sztaki.hu/9762/>
- [O2] B. Csutak, T. Péni, and G. Szederkényi, „Hierarchical routing algorithm for industrial mobile robots by signal temporal logic specifications,” *StuCoSReC. Proceedings of the 2019 6th Student Computer Science Research Conference*, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.26493/978-961-7055-82-5.43-47>

Hivatkozások

- [1] R. M. Anderson and R. M. May, „Population biology of infectious diseases: Part i,” *Nature*, vol. 280, no. 5721, pp. 361–367, 1979.
- [2] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin, 1999.
- [3] I. F. Miller, A. D. Becker, B. T. Grenfell, and C. J. E. Metcalf, „Disease and healthcare burden of COVID-19 in the United States,” *Nature Medicine*, vol. 26, no. 8, pp. 1212–1217, 2020.
- [4] C. Belta, B. Yordanov, and E. Aydin Gol, *Formal Methods for Discrete-Time Dynamical Systems*. E. A.: Formal methods for discrete-time dynamical systems, vol. 89, newblock: Springer International Publishing, 2017.
- [5] A. Donze and V. Raman, „BluSTL: Controller synthesis from signal temporal logic specifications,” in *2nd International Workshop on Applied Verification for Continuous and Hybrid Systems (ARCH 2015)*, 2015.
- [6] F. Sélley, A. Besenyey, I. Z. Kiss, and P. L. Simon, „Dynamic control of modern, network-based epidemic models,” *SIAM Journal on applied dynamical systems*, vol. 14, no. 1, pp. 168–187, 2015.
- [7] L. C. Lopes-Júnior, E. Bomfim, D. S. da Silveira, R. M. Pessanha, S. I. Schuab, and R. A. Lima, „Effectiveness of mass testing for control of covid-19: a systematic review protocol,” *BMJ Open*, vol. 10, no. 8, p. e040413, 2020.
- [8] L. Lennart, „System identification: Theory for the user,” *PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ*, vol. 28, 1999.
- [9] P. Érdi and J. Tóth, *Mathematical Models of Chemical Reactions: Theory and Applications of Deterministic and Stochastic models*. Manchester University Press, 1989.
- [10] R. J. Field and F. W. Schneider, „Oscillating chemical reactions and nonlinear dynamics,” *Journal of Chemical Education*, vol. 66, no. 3, p. 195, 1989.
- [11] Atlo Team, „Koronamonitor: Detailed diagrams of the coronavirus outbreak.” <https://atlo.team/koronamonitor-reszletesadatok>, 2021. (Accessed on 11/11/2021).
- [12] H. Ritchie, E. Mathieu, L. Rodés-Guirao, C. Appel, C. Giattino, E. Ortiz-Ospina, J. Hasell, B. Macdonald, D. Beltekian, and M. Roser, „Coronavirus pandemic (COVID-19),” *Our World in Data*, 2020. <https://ourworldindata.org/coronavirus>.
- [13] P. Polcz, I. Z. Reguly, K. Tornai, J. Juhász, S. Pongor, A. Csikász-Nagy, and G. Szederkényi, „Smart epidemic control: A hybrid model blending odes and agent-based simulations for optimal, real-world intervention planning,” *PLOS Computational Biology*, vol. 21, p. e1013028, May 2025.