PhD Tézisfüzet

Nika Zsolt

Témavezetők: Dr. Rásonyi Miklós és Dr. Szolgay Péter

Optimális befektetések hosszú memóriájú árfolyamatok esetén

Roska Tamás Műszaki és Természettudományi Doktori Iskola
Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Budapest
2020

Tartalomjegyzék

Bevezető

Pénzügyi befektetések során a befektető döntéseket hoz arról, hogy milyen pénzügyi termékeket (például részvény vagy kötvény) vegyen. A befektető célja természetesen a vagyonának a maximalizálása egy jövőbeli időpontban. Azonban nem tudható előre, hogy egy adott befektetésnek mi lesz a pontos eredménye, kimenetele; ezt a bizonytalanságot kockázatnak nevezik és különböző befektetők különbözőképpen veszik figyelembe. A befektető preferenciáját, hogy milyen mértékben befolyásolja döntésében a kockázat, *kockázatkerülésnek* nevezzük.

Mivel a befektetőnek döntéseket kell hoznia a meglévő információi alapján, például a részvények árfolyama alapján, ezért matematikailag a befektetések elméletét a sztochasztikus rendszerek irányításelmélete kezeli. A döntés határozza meg, hogy a meglévő, rendelkezésre álló vagyonának mekkora részét milyen pénzügyi eszközbe fekteti. A független változó szerepét az árfolyamok játsszák és a kockázatérzékenységtől függ a befektető célfüggvénye, amit optimalizálni szeretne.

A kutatás módszertana és alapfogalmai

A kutatás nagy mennyiségben tartalmaz szimulációs eredményeket is. Ezekben az esetekben a részvények árfolyamait a megadott dinamikai rendszernek megfelelően Monte-Carlo módszerrel végeztem. A vizsgálatok során szükség volt numerikus integrálásra is és az általam definiált algoritmusok leprogramozására. A forráskód R nyelven íródott, a vizsgálatokat pedig egy személyi felhasználású laptopon futtattam (kb. 8 GB RAM és 2 magos 2.6 GHz-es processzor).

A befektetések két típusáról szólnak a tézisek aszerint, hogy milyen kockázatérzékenységgel rendelkezik a befektető. A kockázatérzékenységre azért van szükség, mert azonos várható végkimenetelű befektetések között a kockázat mértéke jelenti a különbséget. Egy egyszerű példával élve, ha egy szerencsejáték kimenetele, hogy a játékos 50% eséllyel 100 Ft-ot kap és 50% az esélye, hogy 0 Ft-ot, akkor a nyereség várható értéke 50 Ft. A befektetők azonban előnyösebbnek tartanak egy olyan befektetést, ahol a nyereség biztosan 50 Ft, mivel itt nincs kockázat. A kockázatot tehát „bünteti” a befektető.

A kockázatkerülés, tehát a befektető kockázatának az értéke (mekkora várható haszonról képes lemondani adott kockázat elkerüléséért), változik befektetőnként. Ezt a befektetőtől függő preferenciát a kockázatvállalásra nézve, vagyis kockázatérzékenységet a befektetés *hasznosságfüggvénye* jellemzi. Irányításelméleti terminológiával élve ez a befektető célfüggvénye és sokféle változata létezik. Az egyik legismertebb változata a *log-optimális* portfólió, ahol a vagyon logaritmusának a várható értékét maximalizálja a befektető. Amennyiben a kockázatot nem veszi figyelembe a befektető, akkor *kockázatsemleges* befektetőről beszélhetünk. Ebben az esetben nem teszünk különbséget a fenti példában szereplő két eset között.

A célfüggvényen kívül a döntési függvényt is meg kell adni. Mindkét esetben feltesszük, hogy a befektető *önfinanszírozó*, azaz minden pillanatban csak a jelenlegi vagyonát használhatja fel. Például nem adhat vagy vehet fel kölcsönt.

A pénzügyi eszközöket csoportosíthatjuk aszerint, hogy a jövőbeli árfolyamuk egy determinisztikus vagy sztochasztikus változó. Az előbbi esetben *kockázatmentes* eszközről beszélünk (például kötvény), míg utóbbi esetében *kockázatos* eszközről (például részvény). Egyszerűsítő feltevésünk, hogy a kereskedés során mindkét eszközből 1-1 áll a befektető rendelkezésére. Ez a megkötés nem szigorú, leginkább a jelölést egyszerűsíti, hiszen majdnem minden kijelentés igaz lenne több részvény esetére is egyszerű módosítások után.

Másik gyakori feltételezés, hogy a célfüggvény nem a portfólió egy adott időpontbeli értékétől függ, hanem a végtelenben felvett értékétől. Ezt *hosszú távú* befektetésnek nevezik. Célja, hogy ne a piac egy-egy időleges fluktuációját vizsgálja, hanem hosszú távú viselkedését. Úgyis fogalmazhatunk, hogy az időben átlagos, jellemző viselkedését.

A következő alfejezetekben azok a fogalmak kerülnek bemutatásra, amik alapvető fontosságúak a tézisek megértéséhez.

Log-optimális portfóliók

Tekintsünk egy diszkrét idejű kereskedést egy kockázatmentes eszközzel, aminek árfolyama a t-edik időpontban B_t és egy kockázatos eszközt S_t árfolyammal egy likvid piacon tranzakciós költség nélkül. A kereskedő vagyona a t-edik időpontban:

$$W_t = W_{t-1}(1-\pi_t)B_{t+1}/B_t + W_{t-1}\pi_t S_{t+1}/S_t,$$

ahol a befektető döntése a $\pi_t \in [0,1]$ kereskedési stratégia, vagyis, a vagyonának hány %-át fektesse részvénybe. (A $\pi_t \notin [0,1]$ eset felelne meg például a kölcsönnek, amit kizártunk.) A kötvény árfolyamát szokás fix kamatozásúnak feltételezni, azaz $B_t = B_{t-1}(1+r)$. Mi ezen felül 0 kamatot feltételezünk, ami nem jelent valói megszorítást a modellben, azonban a jelöléseket átláthatóbbá teszi, így $B_t =$ konstans $\forall t$-re. A részvény S_t árfolyama helyett statisztikai okokból a logaritmikus növekményét szokták használni, másnéven a *log-hozamot* $H_t := \log(S_t/S_{t-1})$. Így a fenti egyenlet a

$$W_t/W_{t-1} = (1-\pi_t) + \pi_t \exp(H_t)$$

alakba írható a W_{t-1}-gyel való átosztás után.

A befektető a $t = 0$-dik időpontban w_0 kezdeti tőkével rendelkezik és célja a logaritmikus hasznosságfüggvényét maximalizálnia a teljes vagyonának hosszú távú kereskedés esetén, azaz

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}[\log(W_t)] \to \max .$$

(Amennyiben ez a határérték egyértelműen létezik és véges, jelöljük G^*-gal, akkor a befektető vagyona exponenciálisan nő átlagosan legalább G^* sebességgel, azaz $\mathbb{E}[W_t] \gtrsim W_0 \exp(G^* t)$.)

A befektető vagyona a t-edik időpontban felbontható úgy, hogy $W_t = w_0 \prod_{j=1}^{t} W_j/W_{j-1}$, valamilyen $w_0 > 0$ kezdeti tőkével. A feltételes várhatóérték egyik alaptulajdonságát, a toronyszabályt kihasználva azt kapjuk, hogy az optimális stratégia megtalálásához a portfólió értékének lognövekményeinek ($\log(W_t/W_{t-1})$) a feltételes várhatóértékét kell maximalizálni minden t időpontban:

$$\max_{\pi_t \in [0,1]} \mathbb{E}[\log((1-\pi_t) + \pi_t \exp(H_t))|\mathcal{F}_{t-1}]. \tag{1}$$

Itt $\mathcal{F}_{t-1}$ a $(t-1)$-edik időpontig ismert információt jelöli, tehát ez egy regressziós feladat. Amennyiben létezik olyan π_t^* stratégia, ami minden t-re optimalizálja a kifejezést, meg kell mutatni, hogy az így nyert célfüggvény valóban konvergens. Megjegyezzük, hogy ezt az eljárást, ahol minden időpontban csak a következő időpont növekményét kell optimalizálni, kizárólag a logoptimális portfólióknál lehet alkalmazni, más hasznosságfüggvény esetén nem.

Eddigi eredmények három csoportra oszthatóak. Ha feltételezzük, hogy a H_t folyamat Markov, akkor a dinamikus programozás elvével megoldható a feladat. Ha általánosabb folyamatot tekintünk és csak ergodicitást feltételezünk, akkor a célfüggvény konvergenciája garantált, de nem kapunk eljárást az optimális stratégiára vonatkozóan. Továbbá az ergodicitást bebizonyítani egy pénzügyileg érdekes modellre sok esetben kihívás. Harmadik módszer a nagy adathalmazon működő tanulóalgoritmusok halmaza. Itt a nagy adatmennyiség erős korlátozás, továbbá, hogy a kapott eredmények nem értelmezhetőek, hiszen ezen a módszerek általában nem parametrikusak. Így a modell, a befektetés nem megismerhető vagy értelmezhető.

Esetünkben komplexebb modellekre is megadunk egy általános eljárást, amivel az optimális stratégiát megkonstruálhatjuk. Bizonyítjuk az optimális stratégián alapuló célfüggvény konvergenciáját, numerikusan vizsgáljuk azt. Ezenkívül bevezetünk közelítő stratégiákat is, amik jól működnek és ezzel kapcsolatosan olyan küszöbstratégiát definiálunk, aminek az optimuma tanulóalgoritmussal megtanulható. Ez a tanulóalgoritmus nem feltételezi, hogy a befektetés esetén már nagy mennyiségű adat áll rendelkezésre és azt sem kell tudni, hogy milyen folyamatról van szó (bizonyos kereteken belül).

Tranzakciós díjak figyelembevétele kockázatsemleges preferenciánál

Folytonos idejű kereskedés esetén a kereskedés sebességével arányos tranzakciós költséget figyelembe véve legyen X_t^0 a kockázatmentes eszközben tárolt vagyon értéke, X_t^1 pedig a részvények száma (kockázatos eszköz), továbbá a részvény árfolyama legyen arányos a frakcionális Brown-mozgással: $S_t = \sigma B_t^H$ (azaz, negatív ár is lehetséges és hosszú memóriájú az árfolyamat). A kereskedés a $[0, T]$ időintervallumon történik és célja, hogy a várható értéke a készpénznek T-ben maximális legyen, amennyiben a maximum létezik. A befektető döntése, hogy adott t pillanatban mekkora „sebességgel” kereskedik, ezt ϕ_t-vel jelöljük, a részvények száma így tehát, $X_t^1(\phi) = X_0^1 + \int_0^t \phi_u du$.

A készpénz értéke t-ben:

$$X_t^0(\phi) = X_0^0 - \int_0^t \phi_u S_u du - \int_0^t \lambda |\phi_u|^\alpha du.$$

A kezdeti feltételek X_0^0, X_0^1 szabadon megválaszthatók, míg a λ és α paraméterek piaci jellemzők.

Tudható, hogy optimális stratégia létezik, tehát olyan ϕ_t^* kereskedési sebesség, ami eléri a $\sup_\phi \mathbb{E}[X_T(\phi)] =: u^*(T)$ optimális célfüggvényt. Véges T-re azonban ezt a stratégiát megtalálni reménytelen, azonban a $T \to \infty$ esetben tetszőlegesen megközelíthető az optimális stratégia.

Ismert eredmény, hogy a $T \to \infty$ esetén az optimális célfüggvény $u^*(T)$ növekedése

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{u^*(T)}{T^{H(1+1/(\alpha-1))+1}} < \infty.$$

Azaz, a T lejárati idővel hatványszerűen nő a befektetés várható értéke, $u^*(T) \approx T^{H(1+1/(\alpha-1))+1}$.

Legyen κ a kereskedés „intenzitása”, ami azt mondja meg, hogy az árfolyam abszolút értékének a κ-adik hatványával arányos legyen a kereskedési sebesség. Az intenzitás felső korlátja, hogy $\kappa < 1/(\alpha - 1)$.

A

$$\phi_t(T,\kappa) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(S_t(H-1/2))|S_t|^\kappa, & t \in [0, T/2), \\ -\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \phi_s\, ds, & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

stratégiával elérhető, hogy a hasznosságfüggvény $u(T) \approx T^{H(1+\kappa)+1}$ ütemben növekedjen. A $\kappa = 1/(\alpha - 1)$ esetén optimális lenne a növekedés, de ez nem elérhető.

Ezzel a befektetéssel kapcsolatban kérdés, hogy mit lehet mondani az optimálist közelítő stratégiáról. Mivel a befektetés nem veszi figyelembe a kockázatot, ezért kérdéses, hogy a befektetés Sharpe-mutatója értelmes-e. Ez a mutató a várható nyereség és a kockázat hányadosa és létfontosságú abból a szempontból, hogy egy elméleti befektetési modell mennyire valóságos. Továbbá, elméletileg nem igazolható csak numerikusan, hogy a befektetés milyen módon függ a pénzügyi paraméterektől (a piaci paraméterektől: H Hurst paraméter, α tranzakciós költségráta, λ volatilitás; és a befektetés paraméterétől: κ intenzitás). Emellett az is kérdéses, hogy az optimális növekedési ráta $\kappa = 1/(\alpha-1)$ elérhető-e annak ellenére, hogy elméletileg nincs megalapozva.

Kitűzött célok

A befektetések elmélete hiányos olyan esetekben, amikor az árfolyamatok hosszú memóriáját figyelembe veszik parametrikus modellek esetén. A doktori disszertációmban olyan kereskedési stratégiákat tekintek, amelyek konstruktívak, azaz nem csak a megoldás létezése van bebizonyítva, hanem elő is állítható az optimális stratégia numerikusan. Mivel parametrikus modelleket tekintek, ezért vizsgálható, hogy az árfolyamatokat leíró dinamika paraméterei milyen módon befolyásolják az optimális döntéshozatalt a numerikus szimulációk alapján. A disszertáció során az alábbiak a kitűzött céljaim:

- Konstruktív kereskedési stratégia alkotása különböző kockázatérzékenységű befektetőknél úgy, hogy az árfolyamatok hosszú memóriával terheltek.

- Olyan általános modellosztály és konkrét árfolyamdinamika definiálása, amik parametrikusak és a hosszú memóriával rendelkeznek. Továbbá, a hosszú memóriát egyetlen paraméterrel veszi figyelembe.
- Közelítő stratégiák kidolgozása, melyek számításigényük jelentősen kedvezőbb a log-optimális stratégiához képest.
- A log-optimális és a közelítő stratégiák vizsgálata numerikus szimulációk alapján.
- Olyan tanulóalgoritmus alkotása, ami alkalmazkodik ahhoz a kettős elváráshoz, hogy a pénzügyi adatok folyamatosan érkeznek, ráadásul gyorsan. Ezért az eljárásnak már kis adathalmazon is alkalmazhatónak és a számítási igényének alacsonynak kell lennie.

Tézisek

Feltételesen Gauss folyamatok log-optimális kereskedései

Legyen az $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, ahol az $\mathcal{F}_t$ filtráció a $\{\varepsilon_j\}_{j\le t}$ és $\{\eta_j\}_{j\le t}$ változók által van generálva úgy, hogy $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ és $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ egymástól és időben is független, azonos eloszlású valószínűségi változók normális eloszlással. Továbbá, feltesszük, hogy $Z_{t-1} = z(H_{t-1}, H_{t-2}, \dots)$, ahol a $z : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}$ egy mérhető függvény egy $\mathbb{B}$ Banach téren.

A log-növekmény folyamatot **Feltételesen Gauss**-típusúnak nevezzük, ha az alábbi dinamika szerint fejlődik időben:

$$H_t = F(Z_{t-1}, Y_t, \varepsilon_t, \eta_t), \tag{2}$$

ahol F egy mérhető függvény, Y_t pedig egy stacionárius Gauss folyamat úgy, hogy Y_t folyamat $\sigma(\varepsilon_j,\ j \le t)$-mérhető.

Kapcsolódó hivatkozás: [1].

1. Tézis: Amennyiben az $F(\cdot)$ áfolyamdinamika teljesít egy adott ergodikus-szerű követelményt, akkor konstruálható olyan stratégia (π_t^*) ami függvénye a $(t-1)$-edik időpontban rendelkezésre álló információknak és a stratégián alapuló befektetés majdnem biztosan (1 valószínűséggel) konvergál a log-optimális befektetéshez hosszú távon. Azaz, igaz rá, hogy

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}[\log(W_T^{\pi^*})] = \max_{\pi} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}[\log(W_T)].$$

Az optimális stratégia előállítható egy $\hat{\pi}(z, \nu, \kappa)$ függvény segítségével:

$$\pi_t^* = \hat{\pi}(Z_{t-1}, \nu_{t-1}, \kappa_{t-1}),$$

ahol $\nu_{t-1} := \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ és $\kappa_t := Var[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$. A $\hat{\pi}$ függvény előre meghatározható bármely (z, ν, κ) hármasra kettős numerikus integrálás segítségével.

Megjegyzés. Az állítás erőssége abban rejlik, hogy a Feltételesen Gauss-típusú folyamatok lefedik a legtöbb gyakorlatban szereplő árfolyamdinamikát, amennyiben a zaj Gauss-eloszlású. Ennek segítségével azonban általános módszert kapunk az optimális stratégia megalkotására.

Hosszú memóriájú árfolyammodellek

A *Diszkrét Gaussi Sztochasztikus Volatilitás* (röviden: DGSV) egy új javaslat log-hozam (H_t, $t \in \mathbb{N}$) dinamikára a *rough Volatility* népszerű modellhez hasonlóan definiálva:

$$H_t = \mu + \alpha H_{t-1} + \sigma e^{Y_t} \left(\rho \varepsilon_t + \sqrt{1-\rho^2} \eta_t \right);$$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \mu, \sigma, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \rho \in (-1, 1).$$

A *Bilineáris ARCH* modell az ARCH (R. F. Engle és C. Granger Nobel-díjas modellje) hosszú memóriájú változata az alábbi módon definiálva:

$$H_t = c_0 + c_1 H_{t-1} + \eta_t \sigma_t;$$

$$\sigma_t = a + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j H_{t-j}, \qquad a, c_0, c_1, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Az ε_t és η_t változók egymástól független fehér zajok normális eloszlással.

Kapcsolódó hivatkozás: [1].

2. Tézis: A Diszkrét Gaussi Sztochasztikus Volatilitás és a Bilineáris ARCH modellekre a következő állítások fogalmazhatók meg. A modellek összehasonlításának alapja 1250 részvényárfolyam vizsgálata a New York-i tőzsdéről 2010. január 1-je és 2016. december 31-e közötti időszakról.

1. Mindkét modell paraméterei megválaszthatók úgy, hogy az általuk generált adatsor első 4 momentuma a valóságnak megfelelő legyen. Emellett az úgynevezett „tőkeáttétel-hatás” leírásában is megfelelnek, különösen a DGSV modell esetén, ahol ezt a ρ paraméter szabályozza.

2. Több kutatás által igazolt és általunk is, hogy a hosszú memória nem a log-hozam driftjében jelenik meg, hanem a volatilitásban. Azaz, a log-hozamok időben nem korreláltak, de az abszolút értékük igen (tehát a $\tau \to Cov(|H_t|, |H_{t+\tau}|)$ lecsengése hatványjellegű). Mindkét modell alkalmas ennek a leírására, amennyiben $\beta_j = b_0(1+j)^{-b}$, $b > 0.5, b_0 > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

A DGSV és a BARCH modell log-optimális befektetései

Kapcsolódó hivatkozás: [1].

3. Tézis: Mindkét modell, a DGSV és a Bilineáris ARCH is teljesíti azt az ergodikus követelményt, ami garantálja, hogy minden realizációra (1 valószínűséggel) a log-optimális befektetés valósul meg. Numerikus szimulációk alapján:

1. Az optimális állapot (az elméleti $t \to \infty$ helyett) már 1000-1500 (4-6 év) kereskedési ügylet után stabilizálódik. A konvergencia sebessége a memória erősödésével csökken.
2. A memória erősödésével (nagyobb b_0) az optimális célfüggvény lineárisan csökken, amennyiben a log-volatilitás szórása állandó.
3. A memória lecsengésének a sebessége (b) nincs hatással a az optimális célfüggvény értékére.
4. Az optimális stratégia „szélsőséges”, azaz, egy realizáción belül az idő túlnyomó részében kizárólag két értéket vesz fel vagy 0-t vagy 1-et (a felvett érték időben változik). Ebből sejthető, hogy a stratégiosztály szűkíthető a $[0,1]$-ról a $\{0,1\}$-ra.

Közelítő stratégiák és a küszöbstratégia

Bevezethető úgynevezett *küszöbstratégia* is az alábbi módon:

$$\mathbb{E}[\log((1-\pi)(1+r)+\pi\exp(H_t))|\mathcal{F}_{t-1}] \to \max$$
$$\pi := \mathbb{1}_{\{f(H_{t-1})>0\}} = \mathbb{1}_{\{H_{t-1}>\theta\}}.$$

Amennyiben a lineáris közelítésnél használt $\mathcal{F}_{t-1}$ „információ” megegyezik a küszöbstratégiában használt $f()$ függvénnyel, a két stratégia azonos. (Előzőben a stratégia tetszőleges lehet $[0,1]$ intervallumon, de csak a 0 vagy 1 értéket veszi fel, ellenben a második esettel, ahol $\pi \in \{0,1\}$ csak ezt a két értéket veheti fel.)

Kapcsolódó hivatkozás: a disszertáció benyújtásakor még nem jelent meg cikk, az ezzel kapcsolatos eredmények az arXiv 1907.02457 számán érhető el.

4. Tézis: Az optimális küszöbstratégia kereshető a Kiefer-Wolfowitz algoritmussal, ahol a $g(\theta) := \mathbb{E}[\log((1-\pi_t)+\pi_t\exp(H_t))]$ függvény maximumát keressük a $\pi_t := \mathbb{1}_{\{H_{t-1}>\theta\}}$ stratégia alkalmazásakor. Az algoritmus:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + a_t\frac{H_t\mathbb{1}_{\{H_{t-1}\in[\theta_t\pm c_t]\}}}{c_t}, \quad a_t = t^{-1}, c_t = t^{-1/3}.$$

Ezzel a módszerrel a befektetés optimalizálható anélkül, hogy előzetes statisztikai vizsgálatokat kellene a részvényárfolyamon végezni. Elvégeztük a numerikus elemzéseket, számos csapda merül fel, melyekre megoldást javasoltunk.

1. Az algoritmus számítási igénye alacsony, mivel csak szorzást, összeadást és feltételvizsgálatot tartalmaz. A bejövő adatokat egyenként dolgozza fel és nem használ „big data” alapú eljárást.

2. A vizsgált esetekben a $g(\theta)$ függvénynek pontosan egy maximuma van.

3. Elméletileg nem igazolható, de numerikus szimulációk alapján látható, hogy a θ_t sorozat konvergál négyzetes-közép értelemben az optimális érétkhez.

Megjegyzés 1. A numerikus eredményekből látható, hogy a lineáris közelítő stratégia az esetek nagy részében megegyezik a log-optimális stratégiával, de előállításához nincs szükség numerikus integrálásra, így sok részvény esetén is könnyen elvégezhető a stratégia előállítása.

Megjegyzés 2. A küszöbstratégia hasonló a közelítő stratégiához, de nem feltételezi az $\mathcal{F}_{t-1}$ ismeretét, ami valós adat esetén nem áll a befektető rendelkezésére. Az állítás továbbá kibővíthető, nem csak a H_{t-1} információ használható, hanem bármilyen más is, akár külső, például piaci információ, ami hatással van az árfolyam alakulására. A 4. Tézis algoritmusa pedig ehhez mérten keresi meg az optimális befektetést a beérkező adatfolyam során (általános esetben persze nem bizonyítható, hogy csak 1 maximumhely van).

Kereskedés frakcionális Brown-mozgással

A Sharpe-ráta definíciója: $SR := \mathbb{E}[X_T]/\mathbb{D}(X_T)$.

Kapcsolódó hivatkozás: [2].

5. Tézis:

1. A $\phi_t(T, \kappa)$ kereskedési sebesség esetén a befektetés Sharpe-rátája korlátos.
2. Numerikus eredmények alapján pedig, a Sharpe-ráta a memória erősödésével nő (ha $|H - 0.5|$ nagy). A kereskedés Sharpe-rátája a κ intenzitás függvényében konstans gyenge memória esetén, erős memória esetén pedig csökken a Sharpe-ráta.
3. Az előző két pontból következik, hogy a célfüggvény maximalizálása és a Sharpe-ráta maximalizálása egymással ellentétes elvárás: erős intenzitású kereskedésnél ($\kappa \approx 1/(\alpha - 1)$) a várható érték közel optimális, de a Sharpe-ráta minimális és gyenge intenzitásnál ennek az ellenkezője igaz.
4. A kereskedés a $\kappa = 1/(\alpha - 1)$ határesetben is alkalmas, így az optimális növekedési sebesség elérhető (elméletileg nem igazolható).

Publikációs jegyzék

[1] Nika, Zsolt, and Rásonyi, Miklós (2018). “Log-Optimal Portfolios with Memory Effect.” *Applied Mathematical Finance (Taylor & Francis)*, 25(5-6), 557–585.

[2] Guasoni, Paolo and Nika, Zsolt and Rásonyi, Miklós (2019). “Trading Fractional Brownian Motion.” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10(3), 769–789.