



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem  
**Információs Technológiai és Bionikai Kar**

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

2025.03.19.

**Dr. Dobos Sándor**

*Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium*

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEKI.

---

1. Mi a legkisebb pozitív egész, amiben a jegyek összege 2025?
2. Keressünk olyan számot, amiben a jegyek összege 12, a kétszeresében pedig a jegyek összege 13.
3. Legyen  $A$  a tízes számrendszerben felírt  $4444^{4444}$  szám számjegyeinek összege,  $B$  pedig  $A$  számjegyeinek összege. Számítsuk ki  $B$  számjegyeinek összegét. (IMO 1975.4.)

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Számelméleti függvény:

a pozitív egészen értelmezett komplex értékű függvények.

$S(n)$  =  $n$  jegyeinek összege

Barátkozás: Mennyi  $S(123456789)$ ?

Van-e 4 jegyű  $n$ , amire  $S(n)=7$ ?

Van-e 100 jegyű  $n$ , amire  $S(n)=3$ ?

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

1. Mi a legkisebb pozitív egész, amiben a jegyek összege 2025?

Fűszerezés: új feltétel, legyen  $n$  (i) 5-tel; (ii) 4-gyel osztható.

9999.....99            225 db

4999.....95    226 jegyű szám, ebben 224 db 9-es

2999.....9988        226 jegyű szám, ebben 223 db 9-es

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Mit tudunk meg  $S(n)$ -ről?

- Értékkészlete a pozitív egész számok halmaza
- Nem injektív
- Minden értéket végtelen sokszor felvesz

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

2. Keressünk olyan számot, amiben a jegyek összege 12, a kétszeresében pedig a jegyek összege 13.

Próbálkozás:       $n=2334$        $S(2n)=S(4668)=24$   
                          $n=57$        $S(2n)=S(114)=6$

Ha  $S(n)=12$ , akkor  $n$  osztható 3-mal, ekkor  $2n$  is osztható 3-mal, de ekkor  $S(2n)$  is 3 többszöröse.

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Keressünk olyan számot, amiben

- $S(n)=12$  és  $S(2n)=13$ ;                       $S(n)=14$  és  $S(2n)=15$
- $S(n)=13$  és  $S(2n)=14$ ;                       $S(n)=12$  és  $S(2n)=21$

Ha  $n$  3-mal osztható, akkor  $n$  jegyeinek összege is osztható 3-mal. Ugyanez igaz 3 helyett 9-cel. Még többet mond, ha „akkor és csak akkor” feltételre gondolunk.

$n$  és  $S(n)$  maradéka ugyanaz 9-cel osztva.

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

$x$  alapú számrendszerben az  $n$  szám jegyeinek összege legyen  $S(n;x)$ .  
Ekkor  $x-1$  minden  $d$  osztójára  $n \equiv S(n;x) \pmod{d}$

Demonstráció egy négy jegyű számra,  $n=abcd$

$$\begin{aligned} n &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) + (a + b + c + d) \\ &= (x - 1)(\dots) + S(n; x) \end{aligned}$$

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

3. Legyen  $A$  a tízes számrendszerben felírt  $4444^{4444}$  szám számjegyeinek összege,  $B$  pedig  $A$  számjegyeinek összege. Számítsuk ki  $B$  számjegyeinek összegét. (IMO 1975.4.)

$$S(S(S(4444^{4444}))) = 7$$

Függvény iterációja!

Megkérdezhetjük, milyen a függvény képe? Hogyan változik a függvény? Mi lehet  $S(n)$  és  $S(n+3)$  eltérése?

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK II.

---

Sorolja fel a 28 összes pozitív osztóját!

(Középszintű érettségi 2024. május I. rész 1. feladat 2 pont)

1, 2, 4, 7, 14, 28

Hány osztó van?  $d(28)=6$

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Sorold fel az osztókat! Hány osztó van?

10, 12, ....

8, 16, 32, ...

25, 49, ...

36, ....., 100 000 (!?!)

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  esetén

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$$

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

4. Egy kegyetlen várúr börtönében 400 szűk cellában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul, stb. Jelenleg természetesen minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát, és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őr, aki minden harmadik záron változtat stb., végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a várúr?

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

$d(n)$  milyen  $n$  értékre páratlan?

Milyen  $n$  esetén lesz  $d(n)=2$ ;  $d(n)=3$ ;  $d(n)=12$ ?

$$p^{11}, \quad p^5 q, \quad p^3 q^2, \quad p^2 q r$$

Az 1-et egyszer, minden más értéket végtelen sokszor felveszi a  $d(n)$  függvény.

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

5. Anna súg egy 30-nál kisebb számot Borinak, aki megsúgja Cilinek, hány osztója van. Cili felírja a táblára, hogy a Boritól kapott számnak 2 osztója van. Mi lehetett Anna száma?

$d(d(n))=2$ , mivel  $d(p)=2$ , ezért  $d(n)=p$ , azaz  $n = q^{p-1}$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29; 4, 9, 25; 16

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

6. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész  $k$  számot, amihez létezik olyan  $n$ , hogy

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

(IMO. 1998. Tajvan 3. feladat)

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Hogy néz ki a  $d(n)$  függvény? Hogyan változik?

Hegytétel: Minden pozitív egész  $k$ -hoz létezik  $n$ , amelyre  $d(n)-d(n-1)>k$  és  $d(n)-d(n+1)>k$ .

Völgytétel: Minden pozitív egész  $k$ -hoz létezik  $n$ , amelyre  $d(n-1)-d(n)>k$  és  $d(n+1)-d(n)>k$ .

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

7. Melyik a legkisebb pozitív egész, aminek az osztóit nagyság szerint felsorolva növekvő sorrendben a hatodik osztó lesz a 15?

Mivel a 15 osztó, ezért a 3 és az 5 is.

A 2 nem lehet osztó, mert akkor a 6 és 10 is az lenne.

Diák: „Az 1, 3, 5,  $x$ ,  $y$ , 15 úgy jön ki, ha  $x=7$ ,  $y=9$ . Válasz: 315.”

Próbáljuk ki 15 helyett 35-tel!

OKTV II. kategória 2011-12. második forduló 1. feladat

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK III.

---

Ha felsoroljuk egy szám osztóit, össze is adhatjuk őket!

$\sigma(n)$  az  $n$  szám osztóinak összege.

$$\text{Pl. } \sigma(10)=1+2+5+10=18$$

$$\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=20$$

$$\sigma(28)=1+2+4+7+14+28=56.$$

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

| n           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7 | 8  | 9  |
|-------------|---|---|---|---|---|----|---|----|----|
| $\sigma(n)$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 6 | 12 | 8 | 15 | 13 |

## SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

8. Végtelen sok pozitív egész van, ami nincs az értékkészletben.

9. Milyen  $n$  esetén lesz  $\sigma(n)$  (i)  $n+1$ ; (ii)  $n+2$ ; (iii)  $n+3$ ?

(i) Ha  $n$  prím. (ii)  $1, \dots, n \Rightarrow$  soha nem lehet. (iii)  $n=4$ .

Erdős Pál: végtelen sok páros  $c$  van, amire  $\sigma(n)=n+c$  nem teljesülhet.

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \text{ esetén}$$

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i})$$

# SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

---

Euklidesz: Elemek

„Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képezünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.”

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)2^k = (2^{k+1} - 1)2^k$$

---

Köszönöm a figyelmet!