



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

FÜGGVÉNYEK A TANÓRÁIMON

2025. 03. 19.

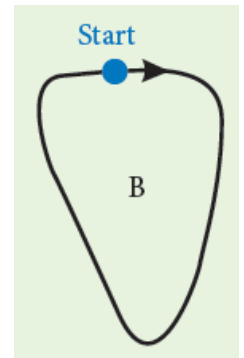
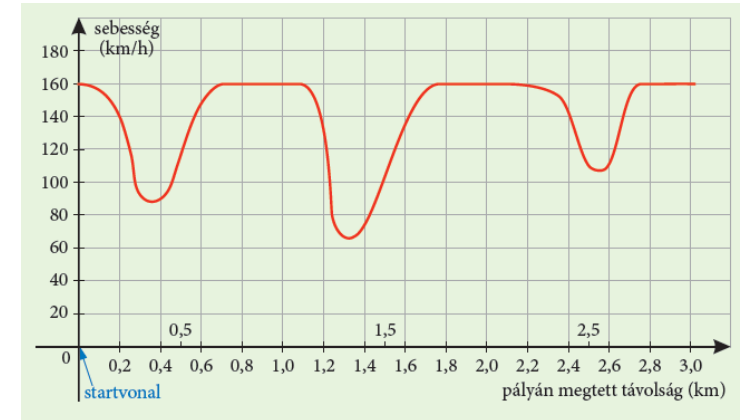
Tamásné Kollár Magdolna

Pannonhalmi Bencés Gimnázium

9. ÉVFOLYAM FÜGGVÉNYTAN - ALAPOZÁS

Mit szeretnék?

- Építeni arra, amit tudnak
- Pontosítani a fogalmakat
- Elkezdeni használni a szakkifejezéseket
- Grafikont értelmezni és készíteni
- Lineáris függvényt biztosan kezelni
- Lineáris részekből összerakott függvénnyel dolgozni
- Néhány alapfüggvényt megismertetni



DILEMMÁK

1. Milyen fogalmak nehezek? Miért?
2. Milyen gyorsan haladjunk?
3. Hol lehetek lazább, hol nem lehetek lazább?
4. Mikor és hogyan differenciáljak?
5. Hol vannak olyan mélységek, érdekességek, amelyeket kevés fogalom bevezetése után is meg lehetne mutatni?

1. MILYEN FOGALMAK NEHEZEK?

NÉHÁNY ÉRDEKES SZÓ

Van egy olyan szó, amelyet úgy használunk, mintha mindenki értené. Vajon mindenki érti?	<i>hozzárendelünk</i>
Van egy olyan szó, amelynek a jelentését nagyon könnyen elfelejtik.	<i>helyettesítési érték</i>
Vannak olyan szavak, amelyeket sokan kevernek.	<i>maximum / maximumhely minimum / minimumhely</i>

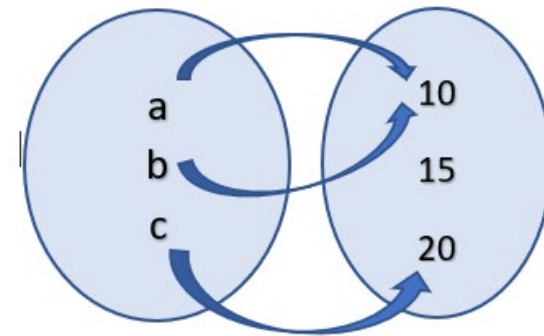
MI SEGÍTHET?

*hozzárendel
helyettesítési érték
hely / érték*

Kevés, ha egyszer vagy kétszer elmagyarázom.

Mi segíthet?

- *Ábrák*
- *Táblázat*
- *Ismétlés, újra és újra kimondom*
- *Hangsúlyozás*
- *Kérdések: Hol veszi fel? Mit vesz fel?*



2. MENNYIRE GYORSAN ÉRDEMES HALADNI?

A TEMPÓRÓL

Ellentétes szempontok

Nyugodtan, lassan	Lendületesen, gyorsan
Idő kell a megértéshez	Hamar kell a válasz, mire való
Idő kell az elmélyült tudáshoz	Hamar kellene az érdekességek
Idő kell a pontossághoz	Hamar kellene a sikerek
Idő kell a felfedeztetéshez	Nehéz elidőzni az alapoknál
Ha túl gyors vagyok, elveszítek diákokat	Ha túl lassú vagyok, elveszítek diákokat

A TEMPÓRÓL

MEGOLDÁSI KÍSÉRLETEK

Nemcsak a tempón múlik, hanem a mennyiségen is. Lehet először kevesebbet.

Nem kell mindenre egyből a pontos definíció.

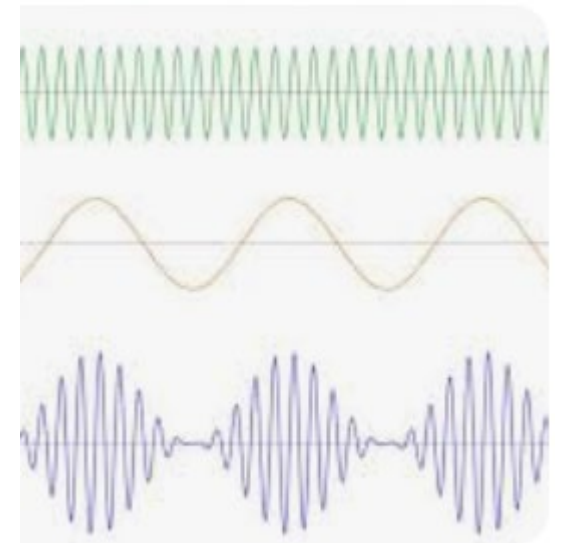
Változatosság – módszerben, témában, tempóban.

Tankönyvi munka, feladatlap.

Jó, ha tudok várni.

Segít, ha van tartalék feladat.

Nem baj, ha nem mindenki ugyanazt kapja.



3. HOL LEHETEK LAZÁBB, HOL NEM LEHETEK LAZÁBB?

„Az $f(x)$ jelöli az f függvény x helyen vett helyettesítési értékét.”

Milyen megfogalmazást használjunk?

Milyen megfogalmazást várjunk el?

Mivel segítjük a megértést?

Mivel segítjük a további munkát?

én pontosan

ők *ELÉG* pontosan

Szabad nem tudni
Szabad hibázni
Szabad kérdezni

4. MIKOR ÉS HOGYAN DIFFERENCIÁLJAK?

A témakör legelején nem tudok
pontos fogalmak
egységes jelölés
leírási módok

Gyakorló feladatok, plusz feladatok egyénileg és pármunkában

Kitekintés, általánosítás, amit nem tud mindenki követni

Több szintű dolgozatok

ÖTLETEK DIFFERENCIÁLÁSRA – HÁNYFÉLEKÉPPEN?

Hány olyan függvény van, amelynek értelmezési tartománya az $\{1; 2; 3; \dots; 10\}$ halmaz, és

- a) képhalmaza az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz;
- b) értékkészlete az $\{1; 2\}$ halmaz;
- c) értékkészlete az $\{1; 2; 3\}$ halmaz;
- d) értékkészlete az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz, és monoton növekedő;
- e) képhalmaza az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz, és monoton növekedő?

MEGOLDÁSOK

Hány olyan függvény van, amelynek értelmezési tartománya az $\{1; 2; 3; \dots; 10\}$ halmaz, és

- a) képhalmaza az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz; 5^{10}
- b) értékkészlete az $\{1; 2\}$ halmaz; $2^{10} - 2 = 1022$
- c) értékkészlete az $\{1; 2; 3\}$ halmaz; $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$
- d) értékkészlete az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz, és monoton növekedő; $\binom{9}{5} = 126$
- e) képhalmaza az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz, és monoton növekedő; $\binom{14}{4} = 1001$

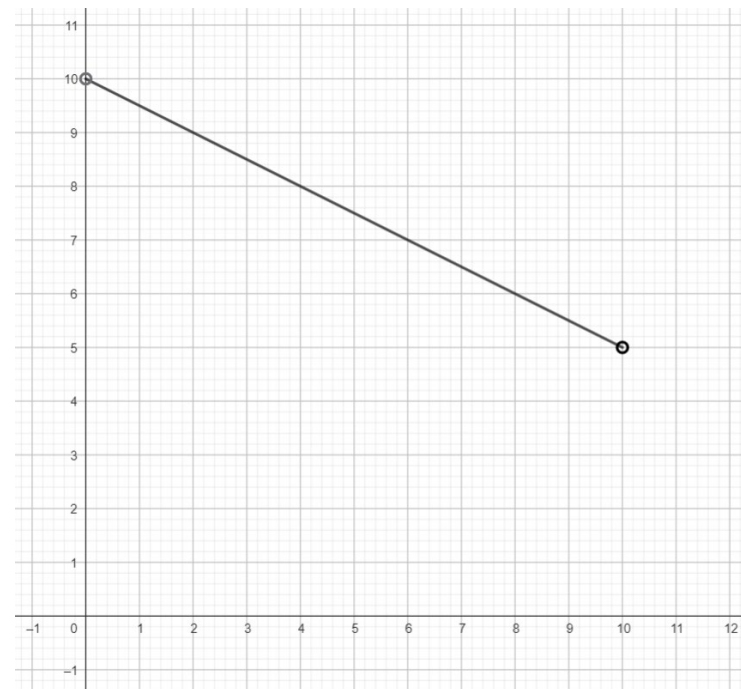
ÖTLETEK A DIFFERENCIÁLÁSRA – ÁBRÁZOLJUNK!

Egy egyenlőszárú háromszögről tudjuk, hogy kerülete 20 egység. Ábrázold grafikonon azt a függvényt, amely az alap hosszához hozzárendeli a szár hosszát!

Megoldás:

$$f(x) = \frac{20 - x}{2} = -0,5x + 10$$

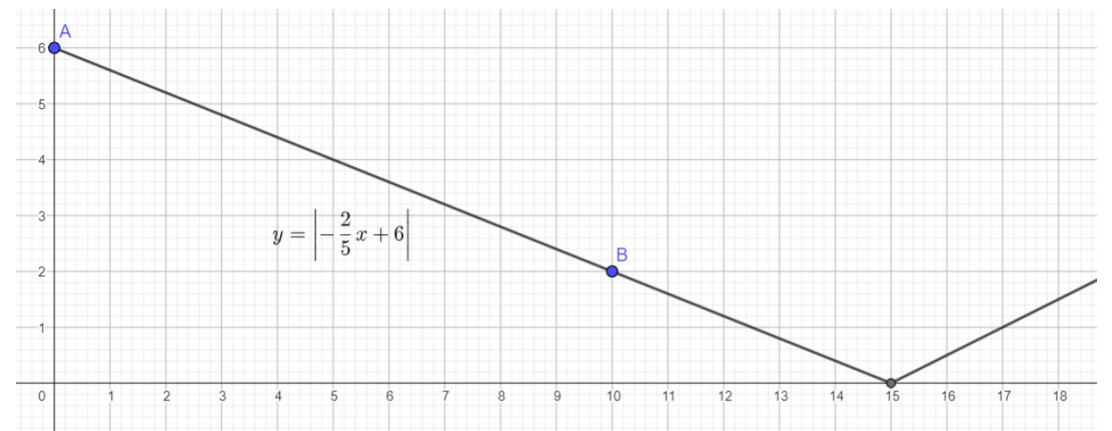
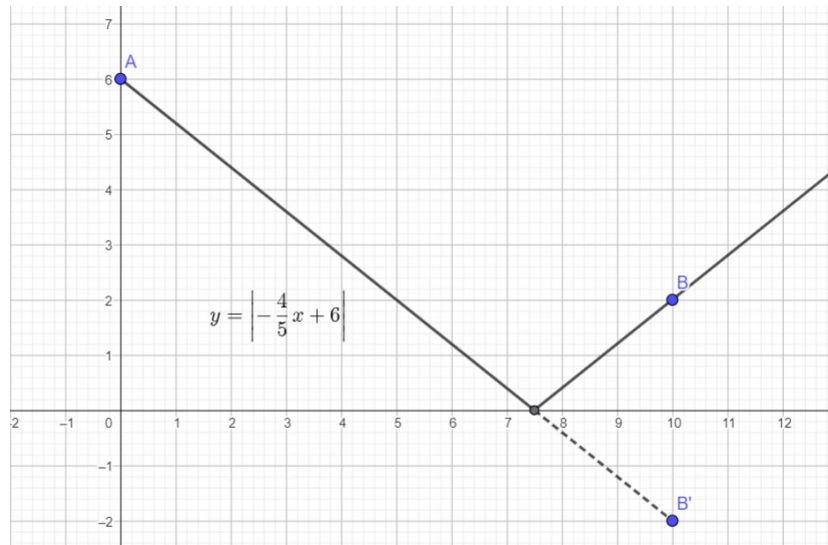
$$D_f =]0; 10[$$



ÖTLETEK DIFFERENCIÁLÁSRA - GRAFIKONOK

Egyenes fénysugarat indítunk a koordináta-rendszer $(0; 6)$ pontjából. Az x tengelyre egy síktükröt helyezünk.

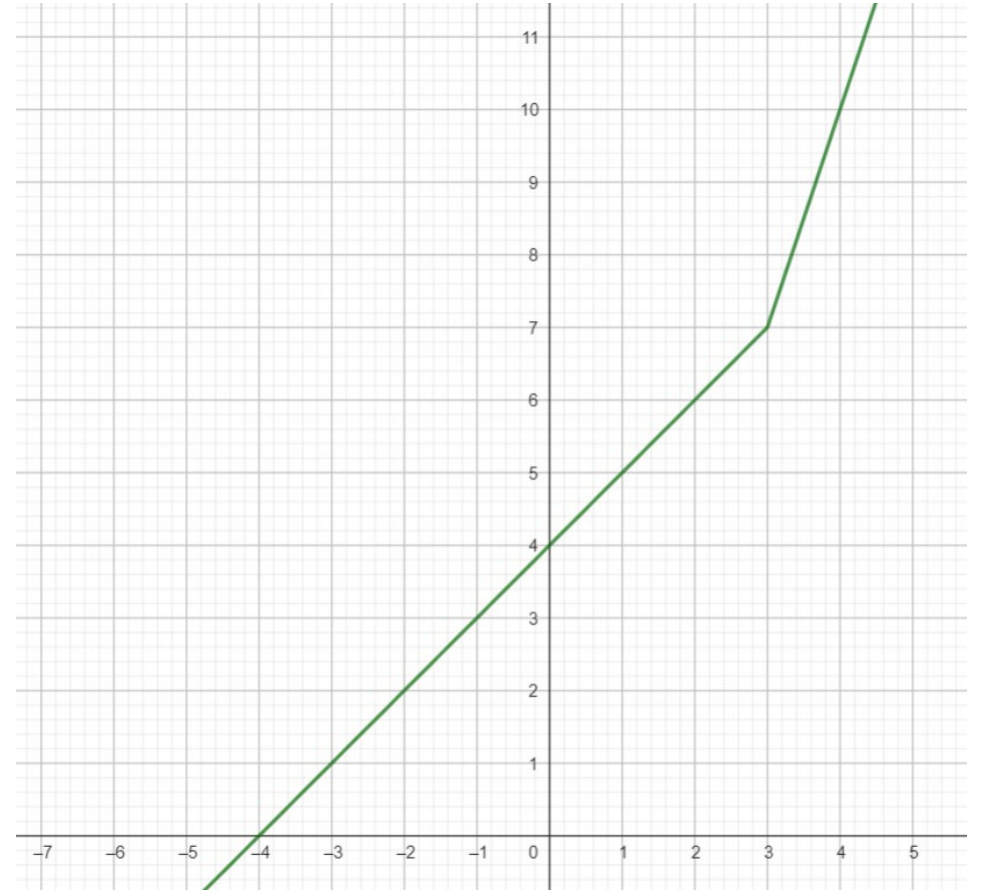
Írd fel azoknak a függvényeknek a hozzárendelési szabályát, amelyekre illeszkedik a fénysugár útja, ha a fénysugár áthalad a $(10; 2)$ ponton.



ÖTLETEK DIFFERENCIÁLÁSRA - GRAFIKONOK

Írjuk fel a hozzárendelési szabályt!

- a) intervallumokra bontva;
- b) abszolút érték függvény és lineáris függvény összegeként!



MEGOLDÁS

Lineáris rész: $ax + b$

Abszolút értékes rész: $|c(x - 3)|$

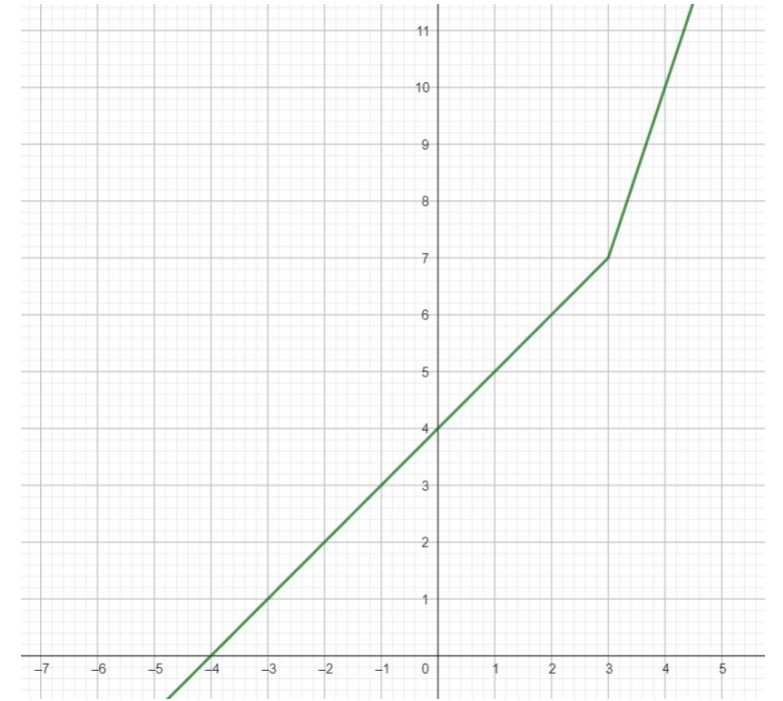
Ha $x > 3$, akkor a meredekség: $a + c = 3$

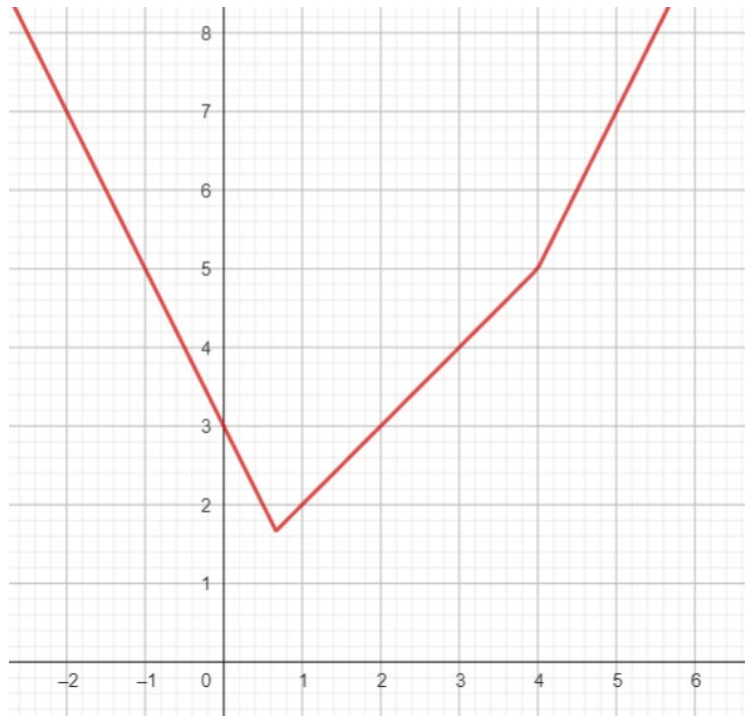
Ha $x < 3$, akkor a meredekség: $a - c = 3$

Ebből $a = 2; c = 1$

Az $x = 3$ helyen felvett értékből $2 \cdot 3 + b = 7$, ebből $b = 1$.

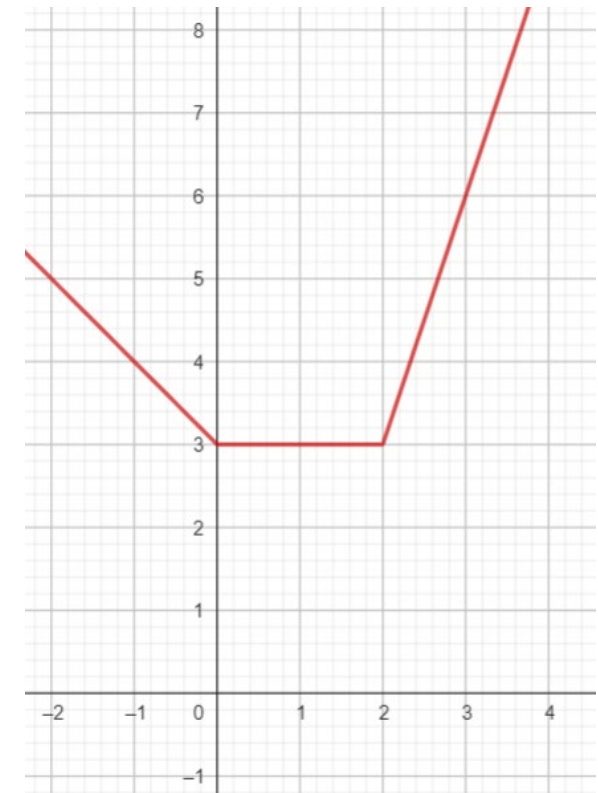
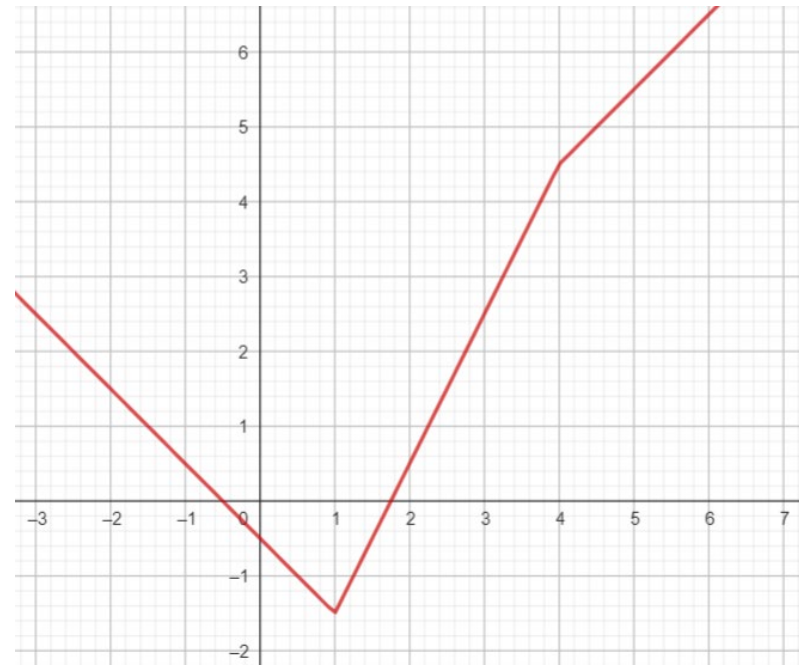
→ $f(x) = (2x + 1) + |x - 3|$





$$y = |1.5x - 1| + |0.5x - 2|$$

$$y = |1.5x - 1.5| - |0.5x - 2|$$



$$y = |1.5x - 3| + x + |0.5x|$$

ÖTLETEK A DIFFERENCIÁLÁSRA – ÁBRÁZOLJUNK!

Egy 50 méter hosszú menetoszlop állandó, 1 m/s sebességgel halad. Az oszlop végéről futva elindul egy futár az oszlop elejére. Amint a futár a menetoszlop elejére ér, átadja az üzenetet, majd azonnal visszafordul, és visszafut a menetoszlop végére.

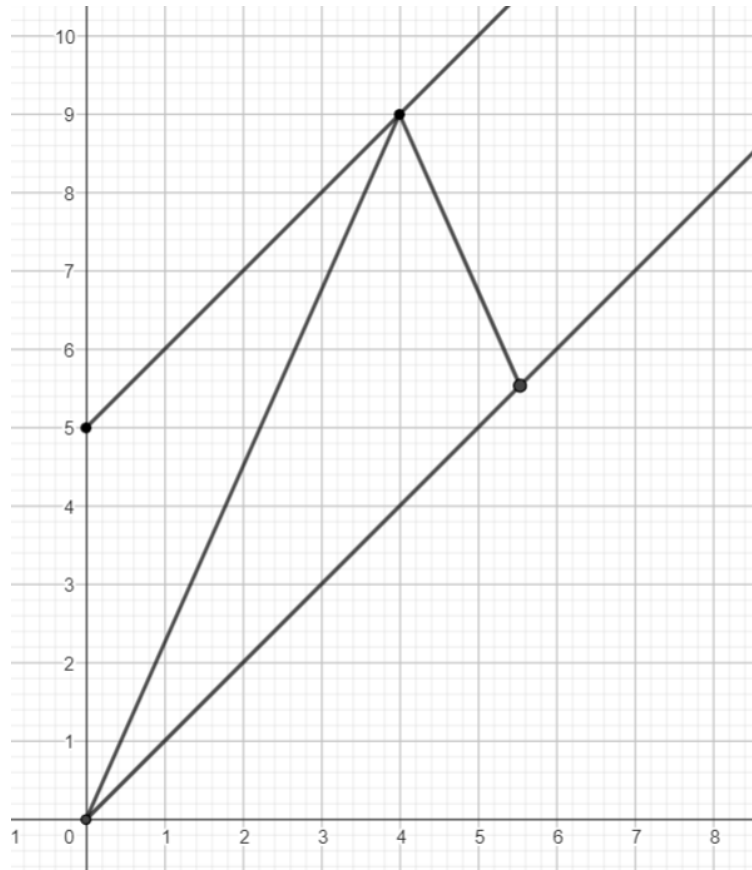
A futár sebességének nagysága végig 2,25 m/s.



Ábrázold közös koordinátarendszerben azokat a függvényeket, amelyek a menetoszlop elejének, végének, és a futárnak a helyét adják meg az idő függvényében!

Mekkora utat tesz meg a futár, és mekkorát a menetoszlop?

MEGOLDÁS



Amíg előre fut:

$$2,25t = 50 + t_1$$
$$t_1 = 40 \text{ (mp)}$$

Amíg visszafelé fut:

$$2,25t + t_2 = 50$$
$$t_2 = 15,385 \text{ (mp)}$$

A menetszlop útja 55,385 m,
a futár útja 124,6 m.

MENETOSZLOPOS FELADAT NEHEZEBB SZINTEN (1388. FELADAT)

A menetoszlop hossza 50 m. Amíg a futár előre fut, majd vissza, azalatt a menetoszlop 120 métert tesz meg. Mennyi utat tesz meg ezalatt a futár?

- Nincs megadva egyik sebesség sem
- A sebességek nem egyértelműek, csak a sebességek aránya
- Másodfokú egyenletre vezet

MEGOLDÁS EGYENLETEKKEL

v = futár sebessége; u = menetoszlop sebessége, t_1 = előre futás ideje, t_2 = hátra futás ideje

1. Megoldás

$$\text{Előre futás: } v \cdot t_1 = 50 + u \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{50}{v-u}$$

$$\text{Hátra futás: } v \cdot t_2 + u \cdot t_1 = 50 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{50}{v+u}$$

Eközben a menetoszlop: $(t_1 + t_2) \cdot u = 120$

$$\frac{50}{v-u} \cdot u + \frac{50}{v+u} \cdot u = 120$$

$$100vu = 120v^2 - 120u^2$$

$$120 \left(\frac{v}{u}\right)^2 - 100\frac{v}{u} - 120 = 0$$

A pozitív megoldás: $\frac{v}{u} = 1,5 \quad \Rightarrow \quad s = 1,5 \cdot 120 = 180 \text{ m}$

MEGOLDÁS EGYENLETEKKEL

2. Megoldás

A menetoszlophoz rögzített koordinátarendszerben:

$$\frac{50}{v - u} + \frac{50}{v + u} = \frac{120}{u}$$

Ebből

$$100uv = 120v^2 - 120u^2$$

A pozitív megoldás: $\frac{v}{u} = 1,5 \quad \Rightarrow \quad s = 1,5 \cdot 120 = 180 \text{ m}$

MEGOLDÁS FÜGGVÉNY- ÁBRÁZOLÁSSAL

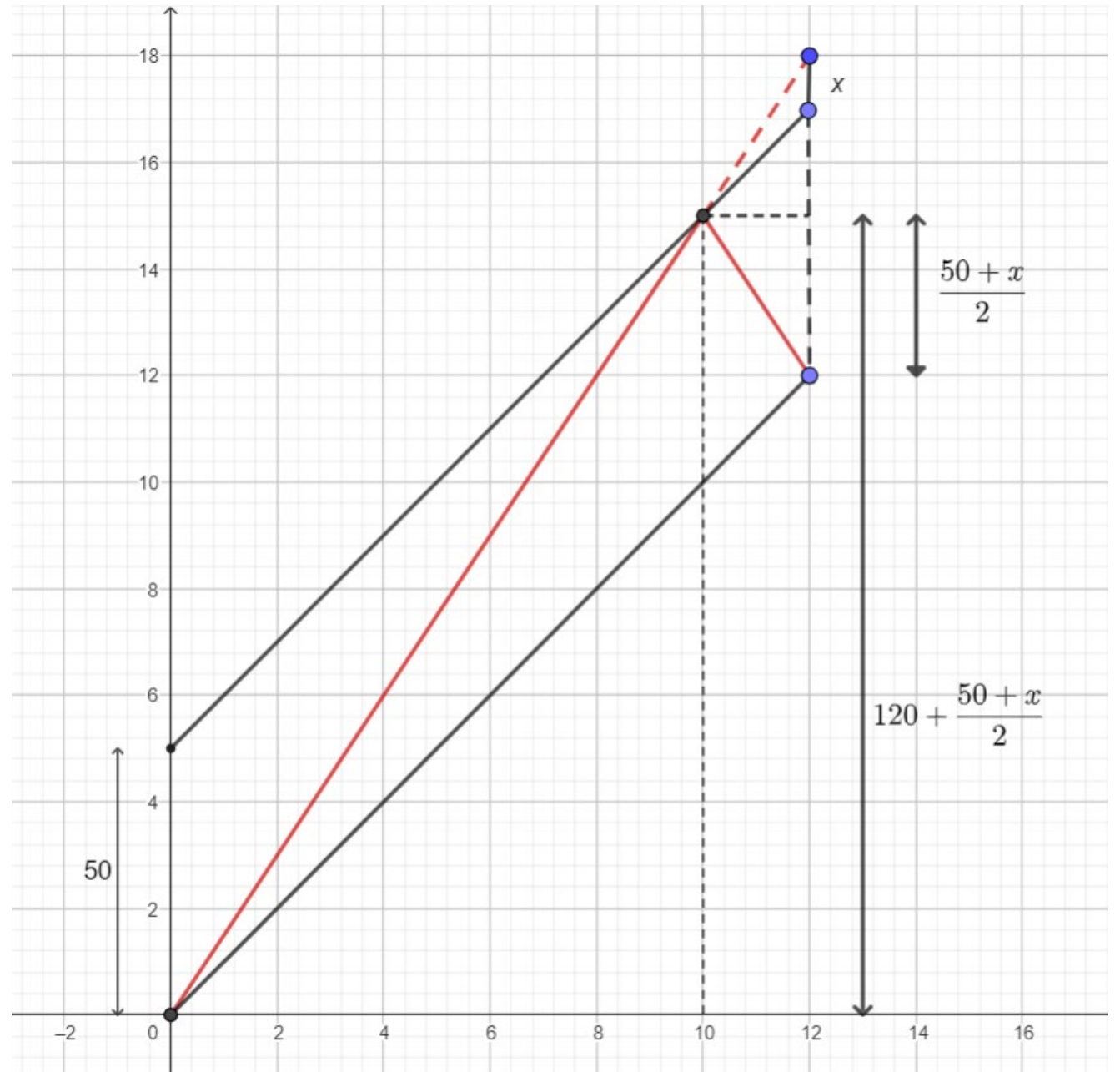
Hasonlóság alapján:

$$\frac{x}{50} = \frac{\frac{50+x}{2}}{\frac{290+x}{2}}$$

$$x^2 + 240x - 2500 = 0$$

pozitív gyök: $x = 10$

A futár útja: $120 + 50 + 10 = 180 \text{ m}$



ÖTLETEK DIFFERENCIÁLÁSRA - ÖSSZETETT FÜGGVÉNY

$$f(x) = ax + b$$

$$g(x) = cx + d$$

Adj meg olyan különböző egész együtthatókat, melyre

a) $f(g(x)) = 6x + 5$

b) $f(g(x)) = 6x + 5$ és $g(f(x)) = 6x + 7$

MEGOLDÁS

a) $f(g(x)) = 6x + 5$ pl. $f(x) = 2x + 5$; $g(x) = 3x + 0$

b) $f(g(x)) = 6x + 5$ és $g(f(x)) = 6x + 7$

Nincs egész együtthatós megoldás.

Olyan megoldás, amikor a főegyütthatók egészek:

pl. $f(x) = 2x + 1,8$; $g(x) = 3x + 1,6$

ÖTLETEK DIFFERENCIÁLÁSRA – ÖSSZETETT FÜGGVÉNY

- a) Adj meg olyan függvényeket, amelyek a természetes számok halmazán vannak értelmezve, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(f(n)) = n.$$

- b) Van-e olyan függvény, amely a természetes számok halmazán van értelmezve, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(f(n)) = n + 1 ?$$

- c) Van-e olyan függvény, amely a természetes számok halmazán van értelmezve, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(f(n)) = n + 2 ?$$

MEGOLDÁSOK

a) $f(f(n)) = n$

Például $f(n) = n$;

Vagy párokat képezve:

$f(0) = 1$ és $f(1) = 0$; $f(2) = 3$ és $f(3) = 2$, *stb.*

b) $f(f(n)) = n + 1$

Nincs megoldás

c) $f(f(n)) = n + 2$

$f(n) = n + 1$

5. HOL VANNAK MÉG MÉLYSÉGEK, ÉRDEKESSÉGEK?

Hozzárendelések végtelen halmazok között

➔ megszámlálhatóan végtelen halmazok

Inverz függvény

Egész rész függvény, tört rész függvény

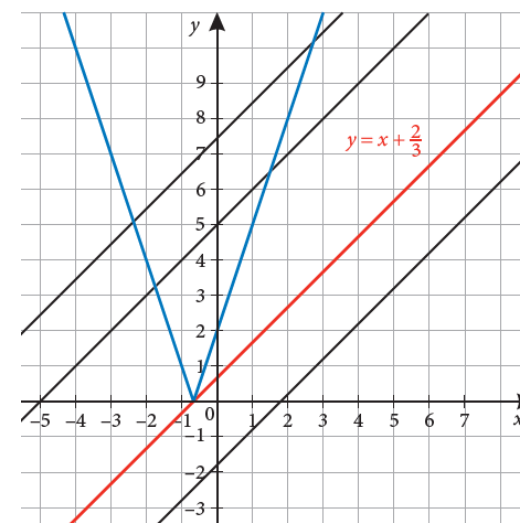
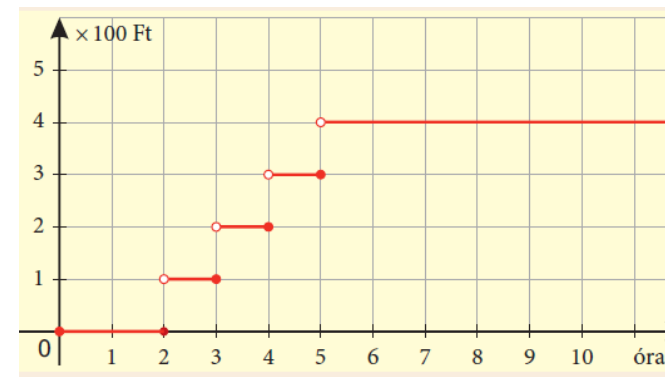
Egyenletek, egyenlőtlenségek

Paraméter, paraméteres egyenletek

Különleges módon megadott függvények

pl. $f(x) = f(x - 1) + x$

Gyakorlati példák



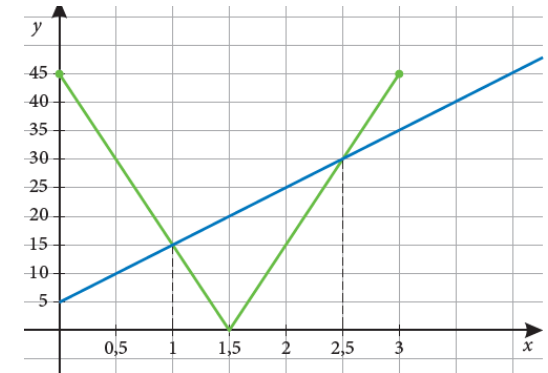
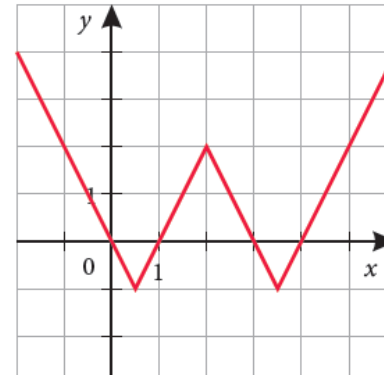
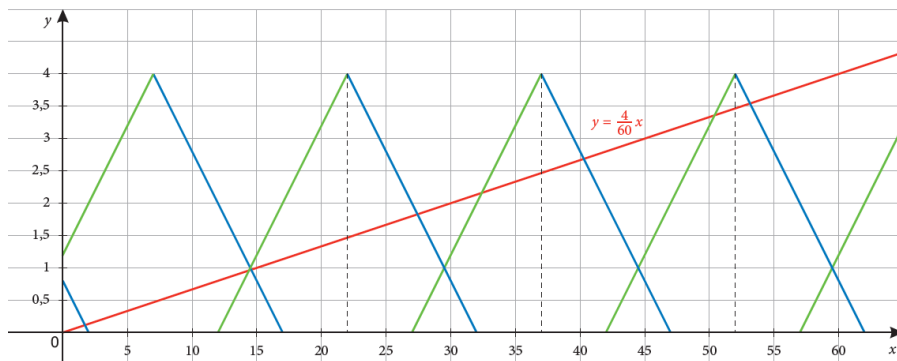
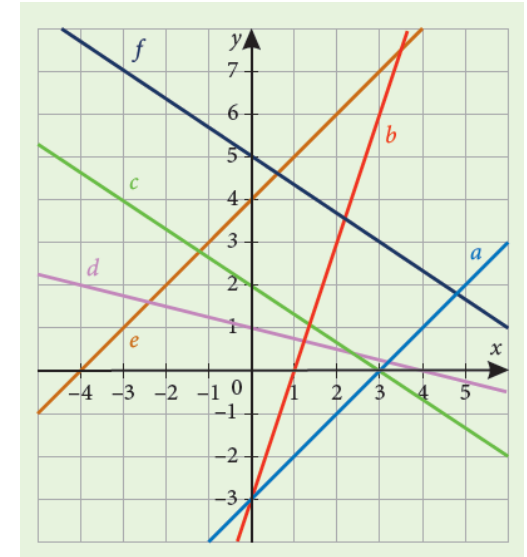
ÖSSZEGZÉS

Lassan indul

Van benne kudarc és van benne siker

Van benne egyensúlyozás

Van benne távlat



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET
