fides et ratio

PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Információs Technológiai és Bionikai Kar

HALMAZOK – ÉRETTSÉGI- ÉS VERSENYFELADATOK TÜKRÉBEN

2024. április. 11.

Dr. Dobos Sándor

Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

1. Egy *n* elemű halmaznak hány részhalmaza van?

- 2^n, minden elemet betehetünk, vagy kihagyhatjuk
- Teljes indukció.
- Számolhatunk a részhalmaz mérete alapján:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n,$ binomiális tétel,

Pascal háromszög

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

2. Hány részhalmaza van a H={1,2,3,4,5,6} halmaznak?

Hány olyan részhalmaz van, amiben

- benne van az 1 és a 6,
- benne van az 1, vagy a 6,
- ha benne van az 1, akkor benne van a 6,
- ha benne van x(<6), akkor benne van x+1,
- Ha benne van x és páratlan, akkor benne van x+1.

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

3. Ha egy három elemű halmaz minden részhalmazának vesszük minden részhalmazát, összesen hány halmazunk lesz? (multiplicitással számolva)

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 8$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

4. Ha egy *n* elemű halmaz minden részhalmazának vesszük minden részhalmazát, összesen hány halmazunk lesz? (multiplicitással számolva)

$$\binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n =$$

$$= (1 + 2)^n$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

5. Adott a $H=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Készítsük el ennek összes részhalmazát. Vegyük egyenként az így kapott halmazokat, és mindegyiknek minden részhalmazát írjuk fel külön-külön egy-egy piros cédulára. Így a piros cédulák között lehetnek olyanok, amelyekre ugyanaz a részhalmaz van felírva, de mindet megtartjuk. Vegyük most sorra egyesével a piros cédulákat, és a rajtuk levő halmaz minden részhalmazát külön-külön felírjuk egy-egy fehér cédulára. Vegyük végül sorra a fehér cédulákat, és a rajtuk levő halmaz minden részhalmazát külön-külön felírjuk egy-egy zöld cédulára. Hány zöld cédulát kell így felhasználnunk? (1996. OKTV II. kategória, döntő 1.feladat)

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

Hány $Z \subseteq F \subseteq P \subseteq G \subseteq H$ „részhalmazlánc” van?

A 3. feladatban $P \subseteq G \subseteq \{1,2,3\}$ volt a kérdés. Minden elemnél egymástól függetlenül eldönthetjük, mikor szerepel utoljára.

Ha H elemszáma *n* és a lánc hossza *k*, akkor a feladat megoldása

$$k^n.$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

6. Hány részhalmaza van a H={1,2,3,4,5,6} halmaznak, melyben páros sok elem van?

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}$$

$$=2^5$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

7. Hány részhalmaza van a H={1,2,3,4,5,6} halmaznak, melyben az elemek összege páros?

$$2^5$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

8. Hány részhalmaza van a H={1,2,3,4,5,6} halmaznak, melyben az elemek összege 4-gyel osztható?

Hány részhalmaza van a H={1,2,3,4,5,6,…,2024} halmaznak, melyben az elemek összege 4-gyel osztható?

$$2^{2022}$$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

9. Legyen H a 2004-nél nem nagyobb pozitív egészek halmaza: $H=\{1,2,\ldots,2004\}$. Jelölje D a H halmaz olyan részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 32-vel osztva 7-et kapunk maradékul, és jelölje S a H halmaz olyan részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 16-tal osztva 14-et kapunk maradékul. Igazoljuk, hogy $S=2D$.

(2004. OKTV II. kategória, döntő 3. feladat)

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

10. Legyen a $H=\{1, 2, 3, \ldots, 2000, 2001\}$ halmaz 77 elemű részhalmazai közül azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páros, S-sel egyenlő, és azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páratlan, N-nel egyenlő. Melyik nagyobb: S vagy N? És mennyivel?

(2001. OKTV II. kategória, döntő 1. feladat)

1000 darab páros szám; 1001 darab páratlan szám

S: páros sok páratlan;   N: páratlan sok páratlan

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

$$|S| = \binom{1000}{77}\binom{1001}{0} + \binom{1000}{75}\binom{1001}{2} + \cdots + \binom{1000}{1}\binom{1001}{76}$$

$$|N| = \binom{1000}{76}\binom{1001}{1} + \binom{1000}{74}\binom{1001}{3} + \cdots + \binom{1000}{0}\binom{1001}{77}$$

$$(1+x)^{1000}(1-x)^{1001} =$$
$$= \left(\binom{1000}{0} + \binom{1000}{1}x + \binom{1000}{2}x^2 + \cdots\right)\left(\binom{1001}{0} - \binom{1001}{1}x + \binom{1001}{2}x^2 - \cdots.\right)$$

x^{77} együtthatója $|S|$-$|N|$

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

Másrészről $(1+x)^{1000}(1-x)^{1001} = (1-x^2)^{1000}(1-x)$

x^{77} együtthatója $|S|$-$|N|$=$-\binom{1000}{38}$.

HALMAZ ÉS RÉSZHALMAZ

(1;2)   (3;4)   (5;6)   (7;8) … (1999;2000) és a 2001

Ha van olyan pár, amelyből csak egyet választottunk, akkor az első ilyen párban a választott számot a párjára cserélve az összeg paritást vált.

Azok maradtak, amelyekben 38 darab teljes párt választottunk és hozzájuk a 2001-et. Ezek összege páratlan és számuk $\binom{1000}{38}$.

HALMAZOK, KONSTRUKCIÓK

11. A pozitív egészeket szeretnénk szétosztani három halmazba, jelölje ezeket A, B, C úgy, hogy ha valaki az egyik halmazból titokban kiválaszt három különböző számot és azok összegét elárulja nekünk, mi ki tudjuk találni, melyik halmazból választott. Mindhárom halmazban végtelen sok elem legyen és diszjunktak legyenek.

A={1,4,7,10,13,...} B={2,5,8,11,14,...} C={3,6,9,12,...}

Sajnos ez nem jó, mert pl 18=1+4+13=3+6+9

A={páros} B={4k+1 alakúak} C={4k+3 alakúak}

HALMAZOK, KONSTRUKCIÓK

12. A pozitív egészeket szeretnénk szétosztani n halmazba úgy, hogy ha valaki az egyik halmazból titokban kiválaszt k különböző számot és azok összegét elárulja nekünk, mi ki tudjuk találni, melyik halmazból választott. A halmazok diszjunktak és végtelen sok elemük legyen.

- n=2 és k=3; n=2 és k páratlan;
- n=3 és k=2; (n;k)=1;
- n=k=2;
- n bármi, k páratlan; ……

Köszönöm a figyelmet!