



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

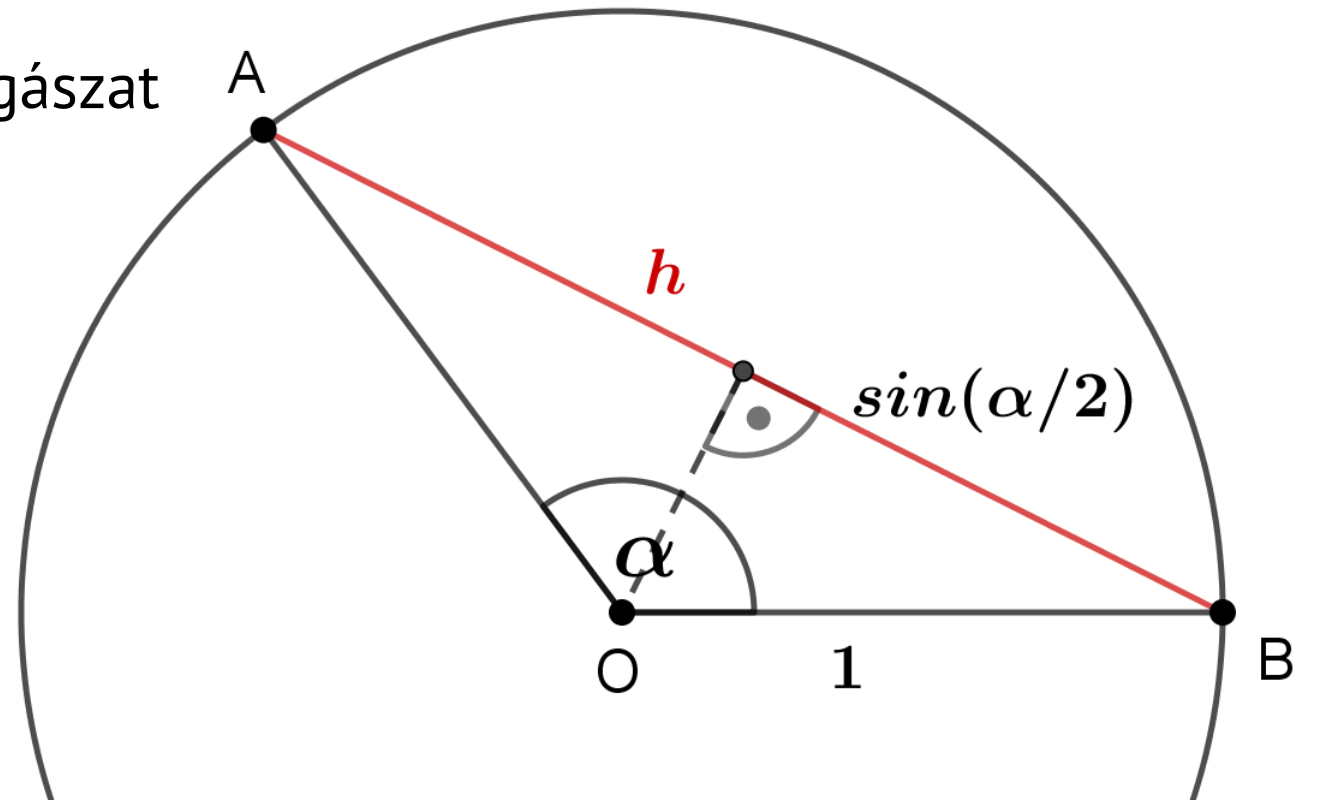
TRIGONOMETRIA A NAT 2020 UTÁN

2024. április 11.

Dr. Horváth Eszter

A TRIGONOMETRIA TANÍTÁSÁNAK CÉLJA

- Egy kis történelem
 - Egyiptom, Mezopotámia csillagászat
 - naptárkészítés – Nílus áradása
 - szögmérés, hajózás, navigáció
- Kr.e. 150 körül Hipparkhosz hűrtáblázat
- $h = 2 \sin(\alpha/2)$
- Kr.u. 150 körül Ptolemaiosz – Almageszt



A TRIGONOMETRIA TANÍTÁSÁNAK CÉLJA

- Szögfüggvények alkalmazása
 - Geometriai számítások
 - távolságok, magasságok, irányok meghatározása
 - építészet, hajózás, térképészet
 - Komplex számok
 - Matematikai analízis
 - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
 - $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

A TRIGONOMETRIA TANÍTÁSÁNAK CÉLJA

- Szögfüggvények fizikai alkalmazása
 - Mozgások leírása
 - lejtőn
 - rezgőmozgás
 - Olyan fizikai fogalmak, ahol vektorok szöget zárnak be egymással:
 - forgatónyomaték
 - munka
 - mágneses térben mozgó töltésre ható erő
 - Váltakozó áram
 - Elektromágneses hullám

A FIZIKA MEGOLDÁST KERES

Emelt szintű tankönyv

I. Mérésekről, mennyiségekről, számításokról	7
1. Fizikai mennyiségek	8
2. Skalár- és vektormennyiségek	9
3. Vektorműveletek	10
4. Szögfüggvények	12

VÁLTOZÁSOK A NAT 2020-BAN

Kapcsolódó ismeretek

Csak emelt szinten:

- radián ismerete
- vektorfelbontás
- skaláris szorzat

Bevezetés középszinten

- hegyesszögek szögfüggvényei
- tompaszögekre „származtatjuk”

VÁLTOZÁSOK A NAT 2020-BAN

Emelt szint

- Definíció forgásszögekre
- Trigonometrikus függvények
- Addíciós tételek
 - Az A változatban nincs levezetés
 - A B változatban skaláris szorzattal
- Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek
 - A B változat alapkönyvében is szerepel – megjelölve, hogy „emelt szint” – szépen elemezve a fontos típusokat.

EMELT SZINT A NAT 2020-BAN

Meggondolandó!

- Nincs emelt kerettanterv
- Az érettségi követelmények adnak némi támpontot
- Nincs emelt szintű tankönyv
- Gyűjtemény a MATEMATIKA emelt szintű oktatásához
- A változat, B változat, MOZAIK kiadó

Tanári felelősség – „saját jegyzetem” legyen

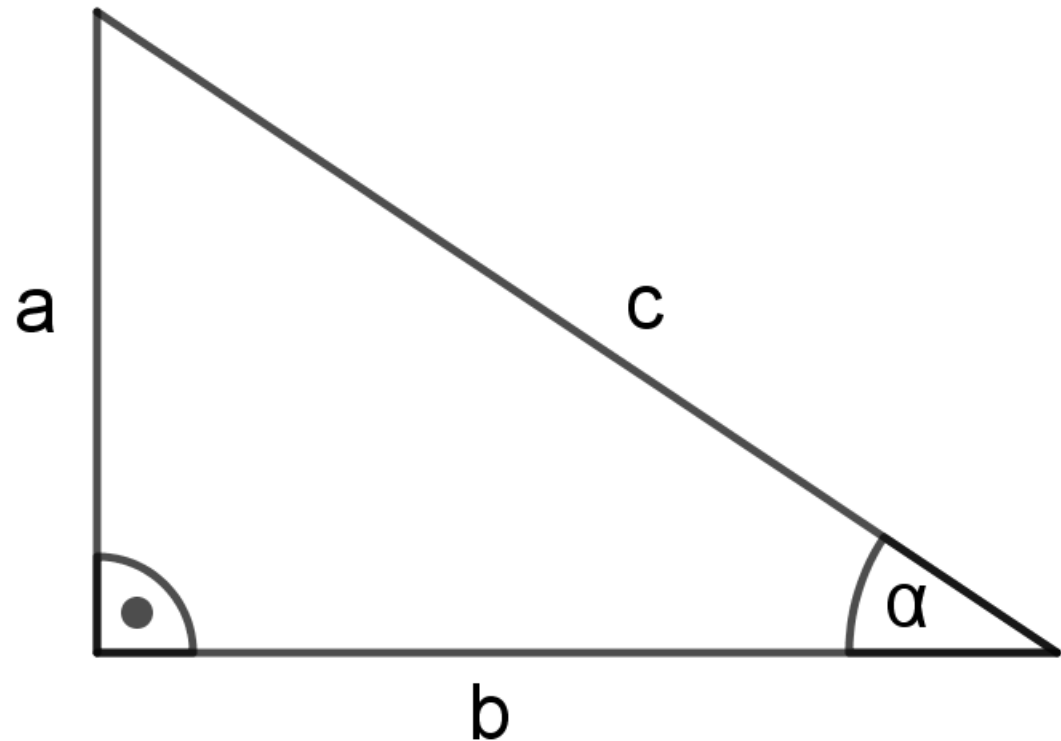
Nekem kell döntenem, nekem kell nagyon értenem a trigonometriát

- Melyek az alapfogalmak, tételek
- Mit definiálok, mit bizonyítok, milyen feladatokban alkalmazom

INDULJUNK A KÖZÉPSZINT SZERINT

1. A tangens definíciója, használata

- A hasonlóság aránytartó
- derékszögű háromszögben
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



INDULJUNK A KÖZÉPSZINT SZERINT

1. A tangens definíciója, használata

- A számológép használata
- A függvénytáblázatot én elhagynám.
- Ismerem a szöget és egy oldalt, keresem a másik oldalt.
- Ismerem két oldalt, keresem a szöget.

INDULJUNK A KÖZÉPSZINT SZERINT

2. szinusz, koszinusz definíciója, használata

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- Ne csak képlettel tudjuk. Változtassuk a betűzést. Szánjunk időt az egyszerű feladatokban való felismerésre
- Nevezetes szögek szögfüggvényei
- Szögfüggvények tulajdonságai:

$$\text{pótszögek; } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

TOMPASZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI FELÉ

3. Egy geometriai probléma --> derékszög, tompaszög szinusza

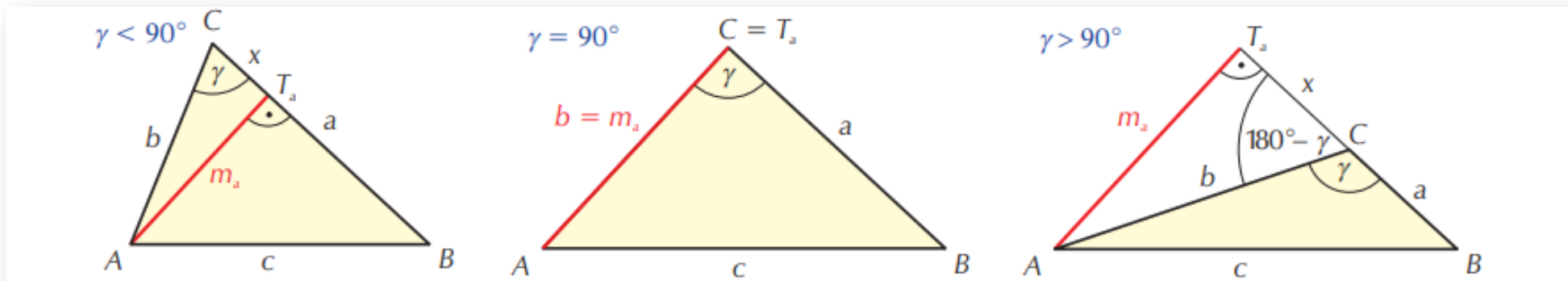
- $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$; $T = \frac{a \cdot b}{2}$; $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2}$
- $a = 2R \cdot \sin \alpha$; $a = 2R$; $a = 2R \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$
- $\sin 90^\circ = 1$; $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$

4. Szinusztétel

- $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
- $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

TOMPASZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI FELÉ

5. Koszinusztétel skaláris szorzat nélkül – B változat



Az AT_aC és AT_aB derékszögű háromszögekben felírt Pitagorasz-tételekből

$$\left. \begin{array}{l} m_a^2 = b^2 - x^2 \\ m_a^2 = c^2 - (a - x)^2 \end{array} \right\}, \text{ a jobb oldalak egyenlők: } c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2.$$

Átalakítások után $c^2 = (a - x)^2 + b^2 - x^2 = a^2 + b^2 - 2ax$, s mivel $x = b \cdot \cos \gamma$, készen vagyunk:
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

TOMPASZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI FELÉ

6. Derékszög és tompaszög koszinusza a koszinusztétel alapján

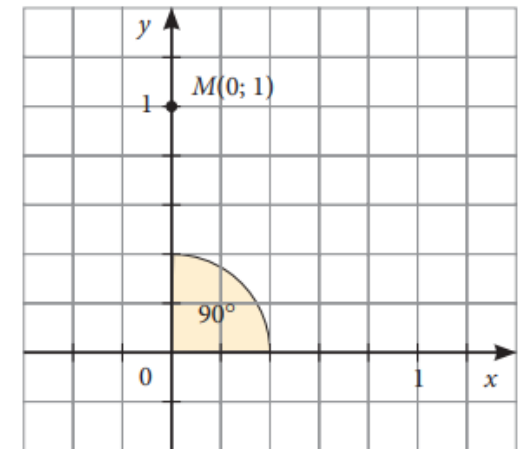
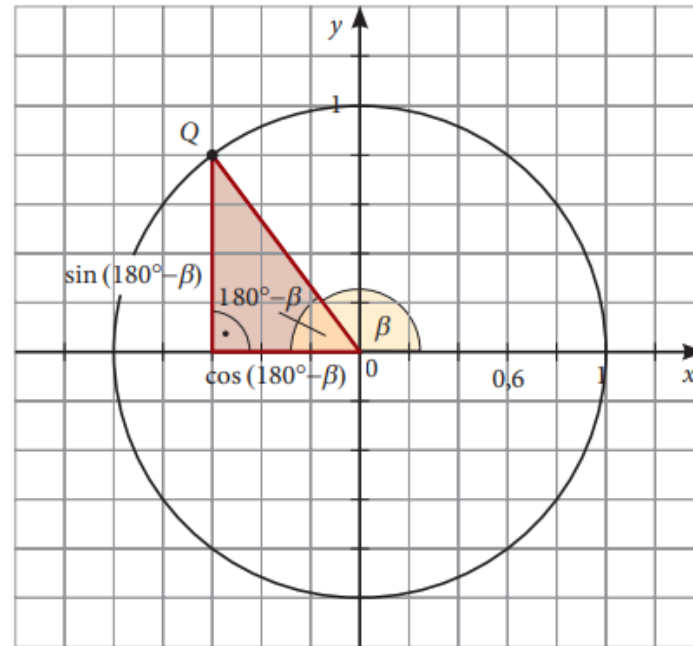
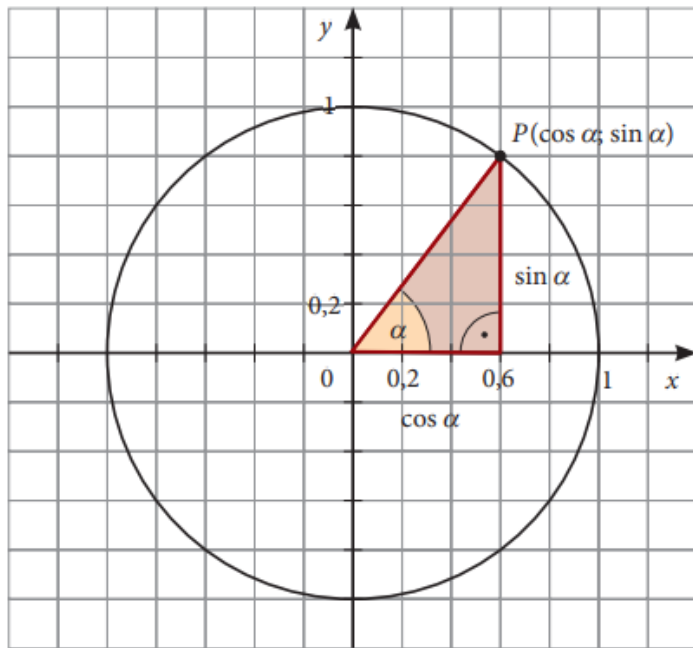
$$\cos 90^\circ = 0 \quad ; \quad \cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

7. Tompszög tangense

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

TOMPASZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI FELÉ

8. Derékszög és tompaszög koszinusza az A változat szerint



A „SZINUSZGÖRBE” ÉS A TÖBBIEK

A változat

- Ráadás ...az alapkönyvben
- Gyűjtemény a Matematika emelt szintű oktatásához 9-12. évf
OH-MAT912AE
 - ebben korrekt kifejtés

A „SZINUSZGÖRBE” ÉS A TÖBBIEK

B változat

- Már az alaptankönyvben is...
- Gyűjtemény a Matematika emelt szintű oktatásához 11-12. évf

OH-MAT1112BE

- A függvények fejezetben külön foglalkozik a trigonometrikus függvényekkel.
- És van egy Trigonometria fejezet is.

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

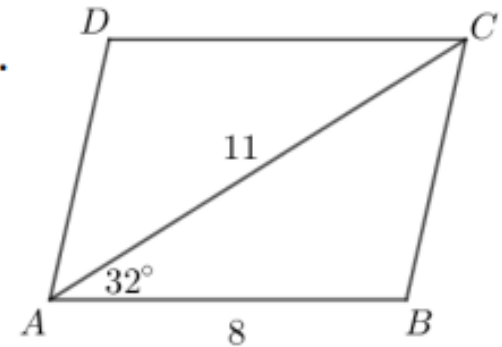
2023. október – közép – 14

14. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 8 cm, AC átlója 11 cm hosszú. Az AB oldal és az AC átló 32° -os szöget zár be egymással.

- a) Számítsa ki a BC oldal hosszát!
- b) Számítsa ki a paralelogramma területét!

Az AC átló felezőpontjából az AB -re bocsátott merőleges szakasz talppontját jelölje T .

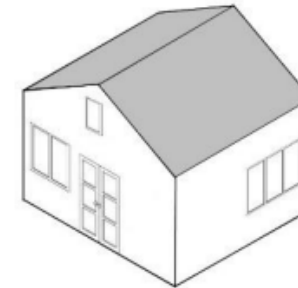
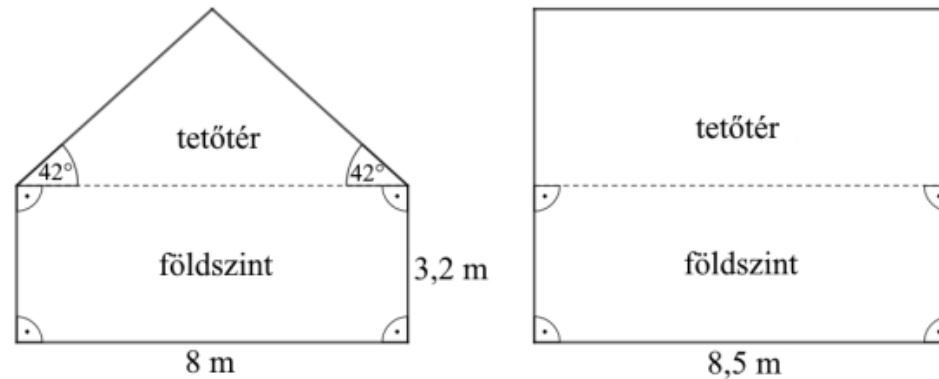
- c) Számítsa ki, mekkora részekre osztja az AB oldalt a T pont!



VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2023. október – emelt – 2/a

2. Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét előlnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A falvastagságtól mindenütt eltekintünk.)



illusztráció

Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!

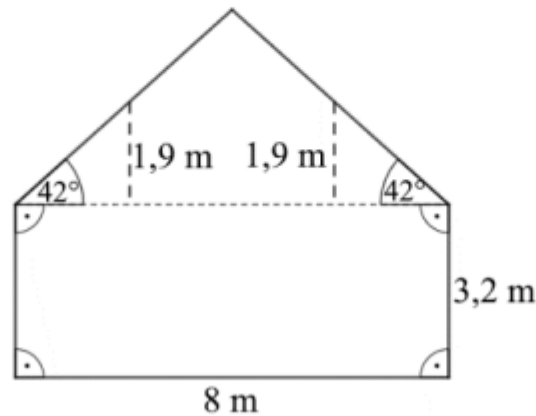
- a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület?
Válaszát m^2 -ben, egészre kerekítve adja meg!

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2023. október – emelt – 2/c

A beépített tetőtér alapterületének csak az a része számít lakóterületnek, ahol a belmagasság legalább 1,9 méter.

- c) Hány négyzetméter a ház teljes lakóterülete (a földszinti és tetőtérbeli lakóterület összesen)?



VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2023. május – közép – 17

17. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 24 cm, a többi oldala 12 cm hosszú.

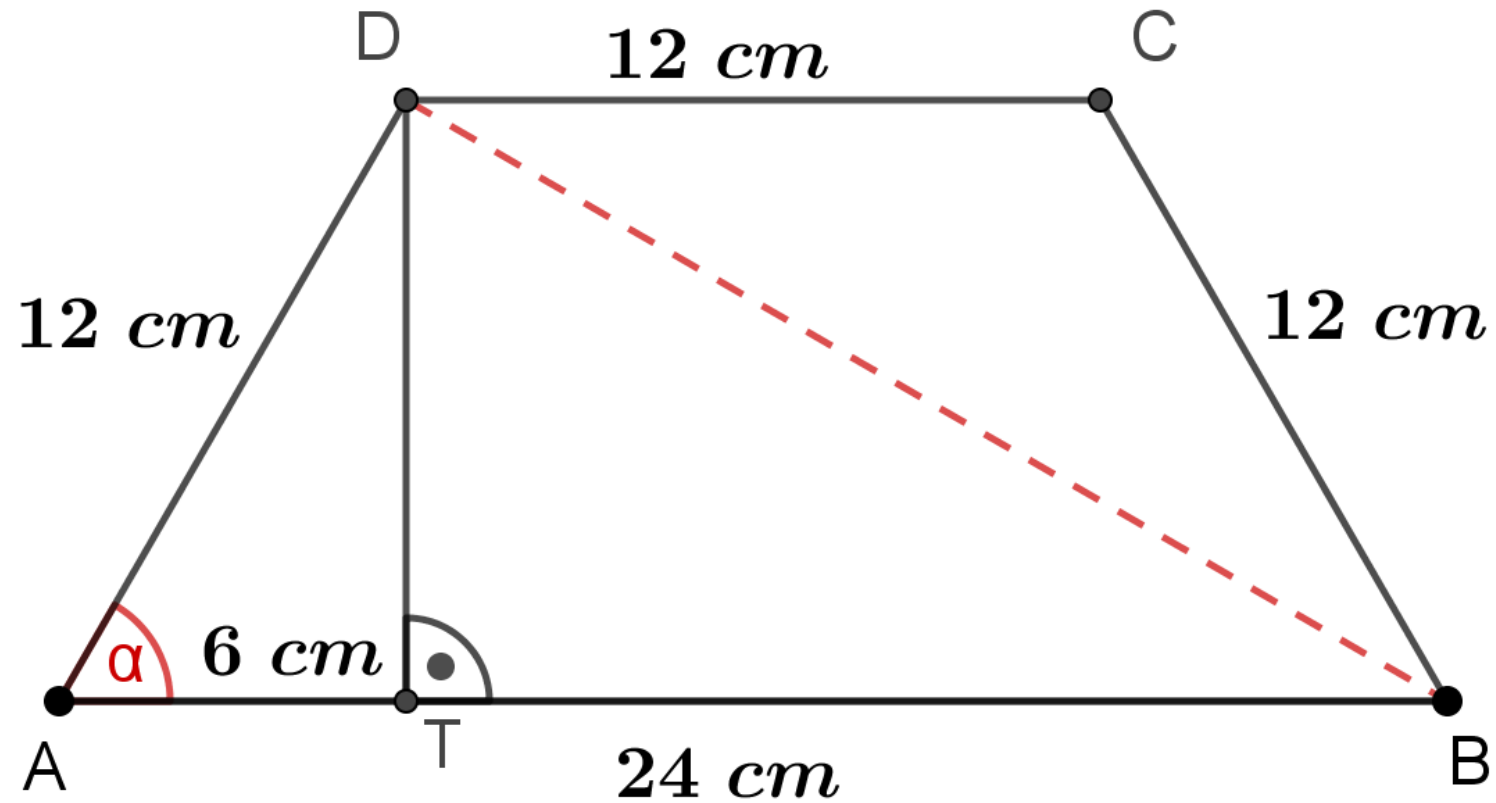
- a) Igazolja, hogy a trapéz A csúcsánál lévő belső szög 60° -os!
- b) Számítsa ki a BD átló hosszát!

A trapézt megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.

- c) Számítsa ki a keletkező forgástest térfogatát!

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

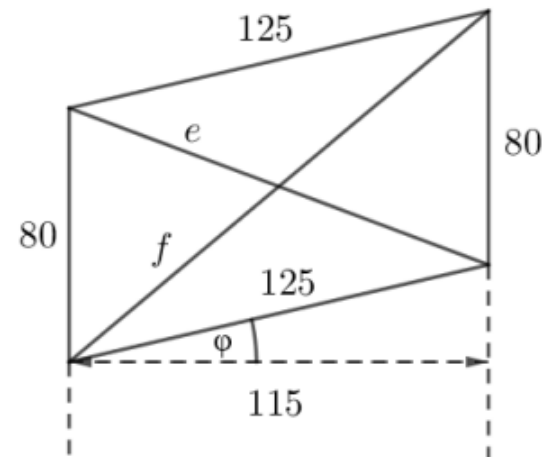
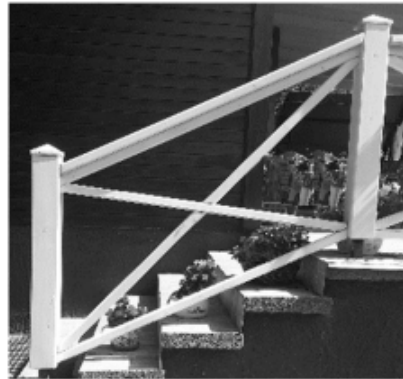
2023. május – közép – 17



VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

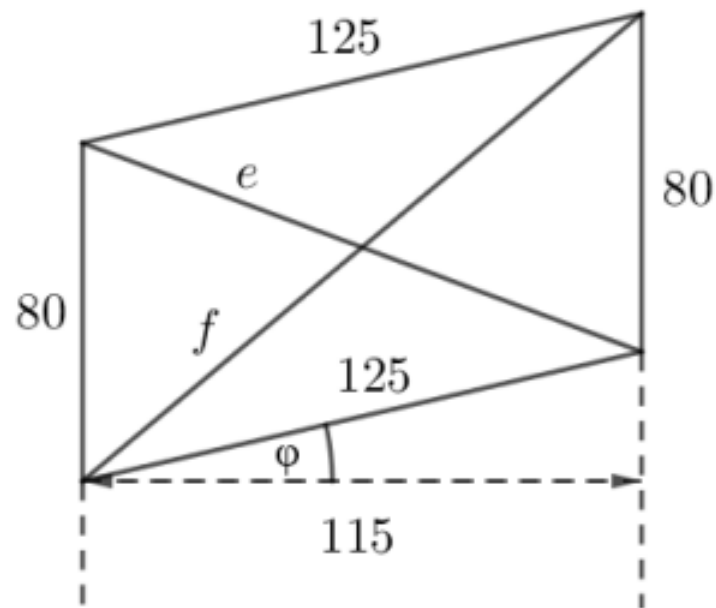
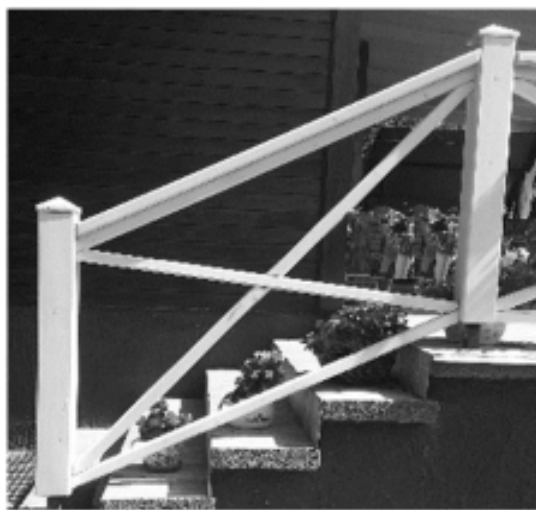
2022. október – közép – 14

14. A képen látható lépcsőkorlát egy részletének oldalnézete paralelogramma alakú. A paralelogramma függőleges oldalai 80 cm hosszúak, távolságuk 115 cm. A másik két oldal hossza 125 cm. (Az ábra jelöléseit használjuk.)



- a) A φ szög a paralelogramma alsó oldalának a vízszintessel bezárt szöge. Számítással igazolja, hogy (egész fokra kerekítve) $\varphi = 23^\circ$!
- b) Számítsa ki a paralelogramma e átlójának hosszát!

14. A képen látható lépcsőkorlát egy részletének oldalnézete paralelogramma alakú. A paralelogramma függőleges oldalai 80 cm hosszúak, távolságuk 115 cm. A másik két oldal hossza 125 cm. (Az ábra jelöléseit használjuk.)



- a) A φ szög a paralelogramma alsó oldalának a vízszintessel bezárt szöge. Számítással igazolja, hogy (egész fokra kerekítve) $\varphi = 23^\circ$!
- b) Számítsa ki a paralelogramma e átlójának hosszát!

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2022. október – emelt – 6/a

6. Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C, D .

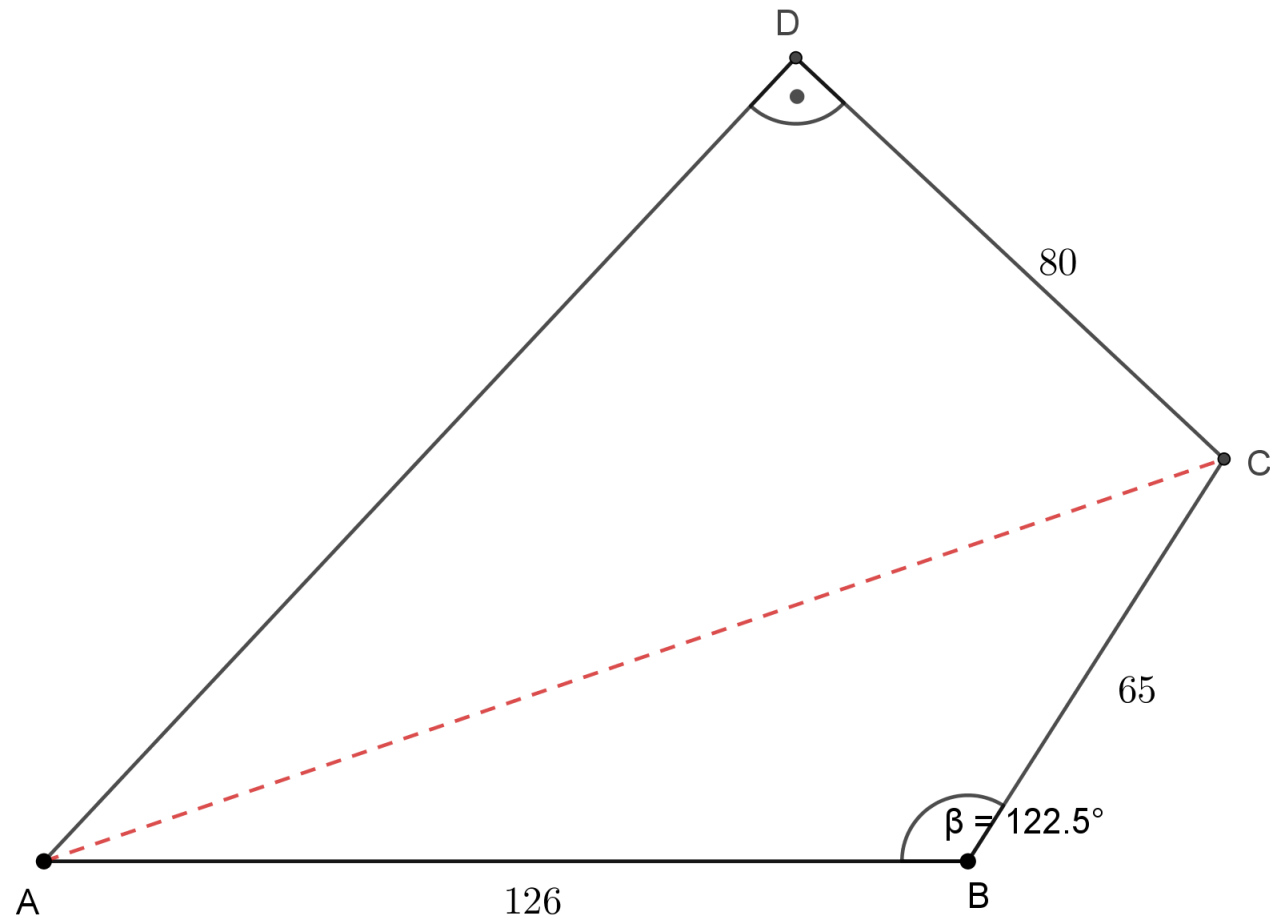
A négyszög három oldala $AB = 126\text{ m}$, $BC = 65\text{ m}$, $CD = 80\text{ m}$, két szöge $\angle ABC = 122,5^\circ$ és $\angle ADC = 90^\circ$.

A legelő 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó.

a) Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetetténél?

($1\text{ ha} = 10\,000\text{ m}^2$)

2022. október – emelt – 6/a



VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2023. május – emelt – 1/b

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$

b) $4\sin^2 x - 16\cos^2 x = -1$

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2022. október – emelt – 2/a

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

b) $\log_3(x + 8) + \log_3(x - 2) - \log_3(x + 4) = 1$

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2022. május – emelt– 1/b

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $9^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 6$

b) $\frac{1}{4} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{8} = 0$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

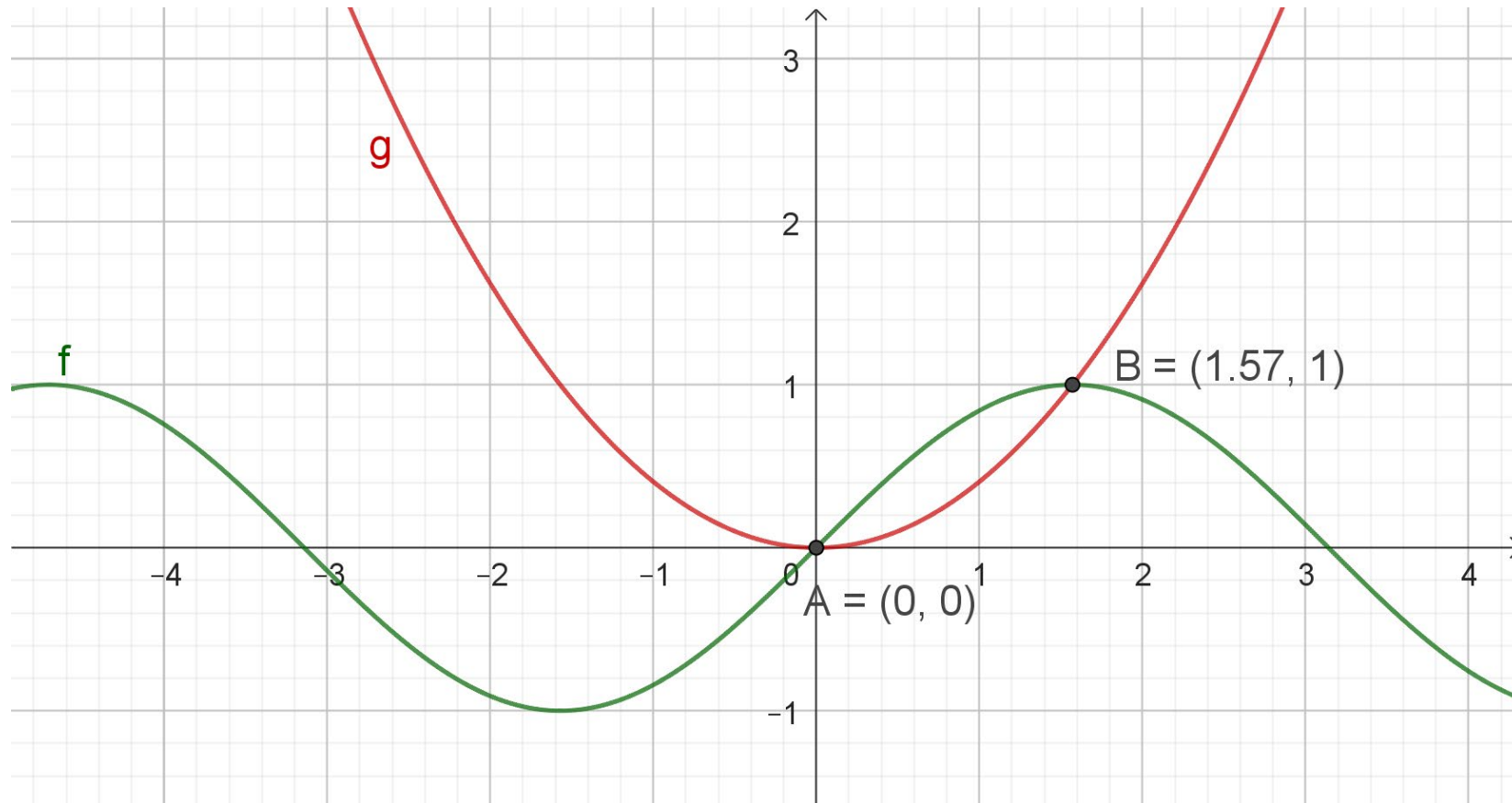
2022. október – emelt – 4

4. Adott az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$ függvény ($x \in \mathbb{R}$).

- a) Igazolja, hogy mindkét függvény grafikonja áthalad az origón és a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponton!
- b) Határozza meg a két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$!

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2022. október – emelt – 4



VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

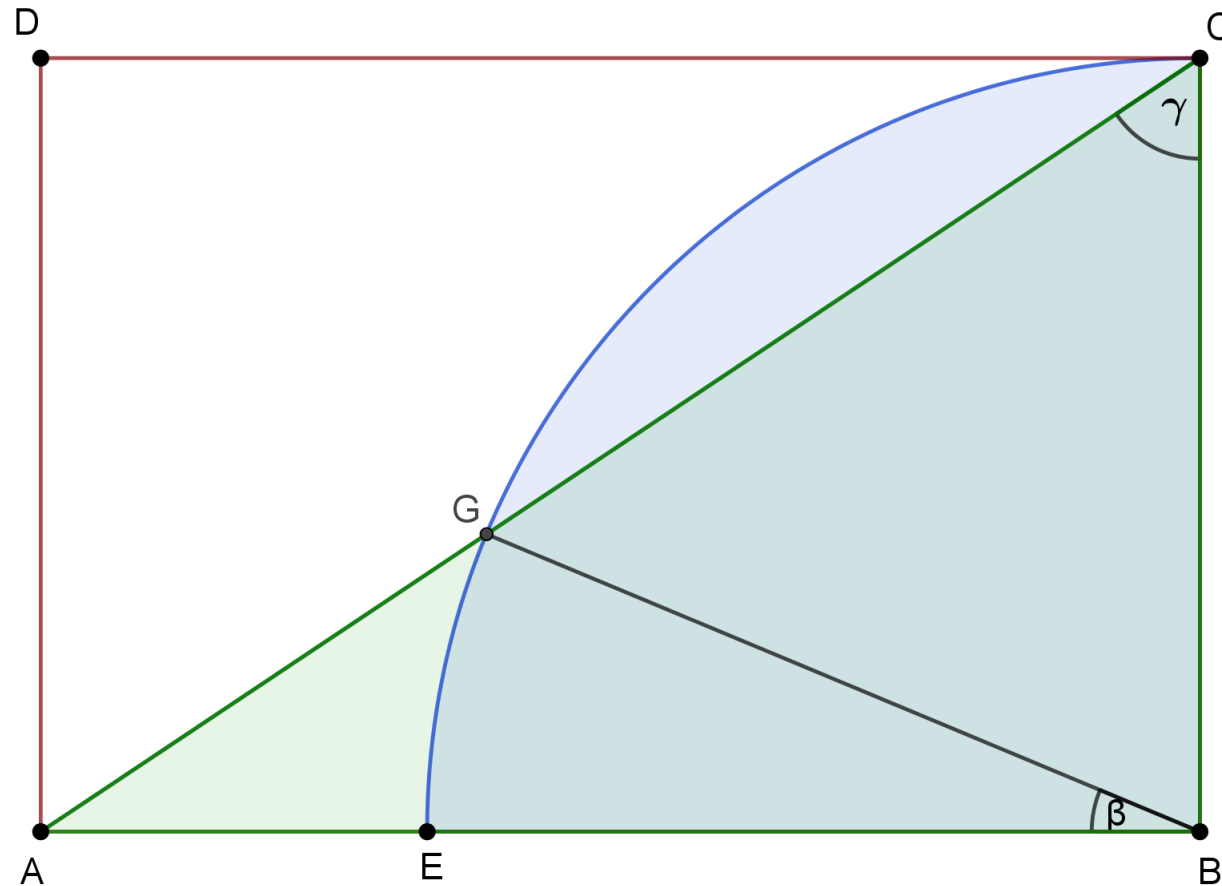
2022. május – emelt– 3/b

3. A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben.

b) Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

VÁLOGATÁS ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL

2022. május – emelt– 3/b



ILYEN KÉRDÉS NEM LEHET AZ IDEI ÉRETTSÉGIN...

2015. október - közép

3. Adja meg a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = 1 + \sin x \text{ függvény értékkészletét!}$$

2018. október - közép

9. Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett

$$x \rightarrow 3 + \sin x \text{ függvény értékkészletét!}$$

Középszinten nincs trigonometrikus függvény és ilyen függvényvizsgálat sincs.

ILYEN KÉRDÉS NEM LEHET AZ IDEI ÉRETTSÉGIN...

2016. május közép

11. Oldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

2016. október közép

8. Adja meg a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlet π -nél kisebb, pozitív valós megoldásait!

Középszinten nincs szögfüggvény általános értelmezése, radián, trigonometrikus egyenlet.

EZ IS KÉRDÉSES AZ EMELT ÉRETTSÉGIN...

2020. május –emelt 5

5. Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2,$$

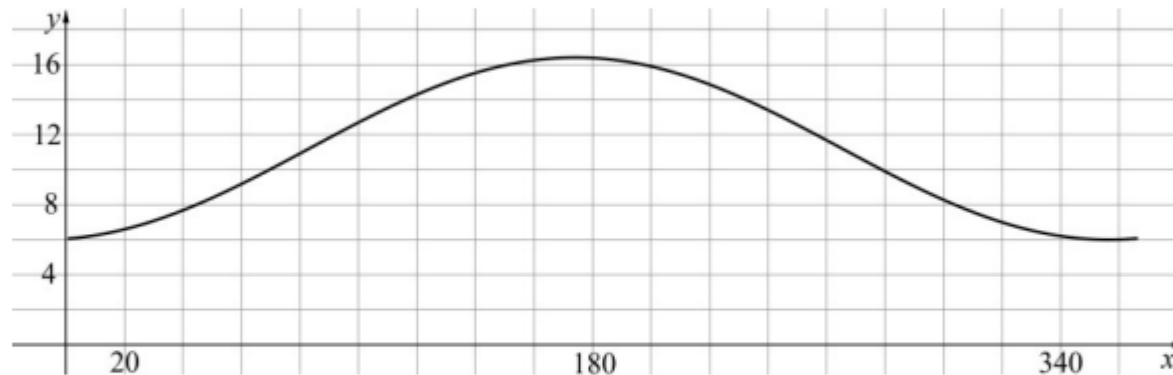
ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365, n \in \mathbf{N}$).

EZ IS KÉRDÉSES AZ EMELT ÉRETTSÉGIN.....

2020. május –emelt 5

Az alábbi ábra a $g : [1; 365] \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

EZ IS KÉRDÉSES AZ EMELT ÉRETTSÉGIN.....

2020. május –emelt 5

- b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!
Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!
- c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

Adott egy másik, az $y = -5,2\cos(x) + 11,2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek.

- d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

SZABAD-E MÉLYEBB VIZEKRE EVEZNI ...?

- **Nem kötelező, de lelet.**

Ebben az előadásban nem volt időm arra, hogy mutassak erre lehetőségeket, de ajánlom két korábbi továbbképzés anyagát:

- **Van érdeklődő diák:**

<https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2014/05.pdf>

- **És vannak egyetemi tanulmányok ...0.ZH**

<https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2016/09.pdf>

Köszönöm a figyelmet!