

Tassy Gergely
„Van egy ötletem!” – Trükkök szakkörre, versenyekre
PPKE ITK, 2024. április 11.

Feladatok

Közepek alkalmazása

- Határozzuk meg a 24 cm^2 területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!
- Igazoljuk, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sorozat szigorúan monoton nő!
- Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$$

Kettős leszámolás

- Hány páros elemszámú részhalmaza van az $\{1; 2; 3; \dots; 2024\}$ halmaznak?
- Bizonyítsuk be a következőt: $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett $(a; b; c)$ számhármast úgy, hogy $a < c$ és $b < c$ legyen?

Polinomosztás

- Hozzuk egyszerűbb alakra: $\frac{x^3 + 343}{x + 7} = ?$ ($x \neq -7$)
- Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$ egyenletet!
- Határozzuk meg az $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x + 6} dx$ integrál értékét!

Rekurziók explicit alakra hozása

- Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sorozatnak?
- Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1, a_2 = 7, a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sorozatnak?
- Mennyi a 2024-edik Fibonacci-szám?