fides et ratio

PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Információs Technológiai és Bionikai Kar

VAN EGY ÖTLETEM!
Trükkök szakkörre, versenyekre

2024. április 11.

Tassy Gergely

Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium, Budapest

BEVEZETÉS

- szubjektív válogatás számomra kedves trükkökből
- főként szakkörre, versenyre
- túlmutathatnak az emelt szintű érettségin
  (de: „kerülő utakhoz” hasznosak az érettségin is)
- „kacsintás” egyetemi témák felé, amik középiskolában is érthetőek
- nehézség: (*) órai érdekesség
  (**) szakköri trükk
  (***) megyei/országos versenyre készülés

TÉMÁK

1. Közepek alkalmazása
2. Kettős leszámlálás
3. Polinomosztás
4. Rekurziók explicit alakra hozása

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm^2 területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm^2 területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

- Keressük $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$ minimumát, ha $x > 0$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm² területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

- Keressük $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$ minimumát, ha $x > 0$
- Számtani-mértani közép x-re és $\frac{24}{x}$-re (ezek nemnegatívak):

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm^2 területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

- Keressük $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$ minimumát, ha $x > 0$
- Számtani-mértani közép x-re és $\frac{24}{x}$-re (ezek nemnegatívak):

$$\sqrt{x \cdot \frac{24}{x}} \le \frac{x + \frac{24}{x}}{2} \qquad 4\sqrt{24} \le 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm^2 területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

- Keressük $f(x)=2\cdot\left(x+\frac{24}{x}\right)$ minimumát, ha $x>0$
- Számtani-mértani közép x-re és $\frac{24}{x}$-re (ezek nemnegatívak):

$$\sqrt{x\cdot\frac{24}{x}}\le\frac{x+\frac{24}{x}}{2} \qquad 4\sqrt{24}\le 2\cdot\left(x+\frac{24}{x}\right)$$

- Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=\frac{24}{x}=\sqrt{24}$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(*) Határozzuk meg a 24 cm² területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

- Keressük $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$ minimumát, ha $x > 0$
- Számtani-mértani közép x-re és $\frac{24}{x}$-re (ezek nemnegatívak):

$$\sqrt{x \cdot \frac{24}{x}} \le \frac{x + \frac{24}{x}}{2} \qquad 4\sqrt{24} \le 2 \cdot \left(x + \frac{24}{x} \right)$$

- Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = \frac{24}{x} = \sqrt{24}$
- Tehát a legkisebb kerületű a $\sqrt{24}$ cm oldalú négyzet

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

- Ötlet: számtani-mértani közép *n* db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–re és 1 db 1-re:

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

- Ötlet: számtani-mértani közép n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–re és 1 db 1-re:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \le \frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

- Ötlet: számtani-mértani közép n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–re és 1 db 1-re:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

- Ötlet: számtani-mértani közép n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–re és 1 db 1-re:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \le \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(**) Igazoljuk, hogy szigorúan monoton nő a következő sorozat: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

- Ötlet: számtani-mértani közép n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–re és 1 db 1-re:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \le \frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

- Tehát $a_n < a_{n+1}$ (nincs egyenlőség, mert $1+\frac{1}{n} \ne 1$)

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(***) (OKTV 2000/2.) Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(***) (OKTV 2000/2.) Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$$

- Átalakítva a bizonyítandó állítást:

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_b \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_c \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 3$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(***) (OKTV 2000/2.) Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$$

- Átalakítva a bizonyítandó állítást:

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_b \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_c \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 3$$

- Harmonikus-mértani közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(***) (OKTV 2000/2.) Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$$

- Átalakítva a bizonyítandó állítást:

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_b \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_c \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 3$$

- Harmonikus-mértani közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$$

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \log_a \sqrt[3]{abc} = \frac{1+\log_a b+\log_a c}{3}$$

1. KÖZEPEK ALKALMAZÁSA

(***) Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_b \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \log_c \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 3$$

$$\log_a \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{1+\log_a b+\log_a c}{3}$$

$$\log_a b + \log_b a \geq 2$$

$$\log_b \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{1+\log_b a+\log_b c}{3}$$

$$\log_c \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{1+\log_c a+\log_c b}{3}$$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az $\{1; 2; 3; \dots; 2024\}$ halmaznak?

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az {1; 2; 3; …; 2024} halmaznak?

- 1. megoldás: $\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=?$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az {1; 2; 3; ...; 2024} halmaznak?

- 1. megoldás: $\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=?$
- 2. megoldás: vegyük {1; 2; 3; ...; 2023} tetszőleges részhalmazát, ekkor a páros elemszámhoz a 2024 szerepe egyértelmű, ez 2^{2023}

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az {1; 2; 3; …; 2024} halmaznak?

- 1. megoldás: $\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=?$
- 2. megoldás: vegyük {1; 2; 3; …; 2023} tetszőleges részhalmazát, ekkor a páros elemszámhoz a 2024 szerepe egyértelmű, ez 2^{2023}
- **Ha ugyanazt az összeszámlálási kérdést kétféleképp megoldjuk, akkor a két képlet eredménye egyenlő:**

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az {1; 2; 3; …; 2024} halmaznak?

- 1. megoldás: $\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=?$
- 2. megoldás: vegyük {1; 2; 3; …; 2023} tetszőleges részhalmazát, ekkor a páros elemszámhoz a 2024 szerepe egyértelmű, ez 2^{2023}
- **Ha ugyanazt az összeszámlálási kérdést kétféleképp megoldjuk, akkor a két képlet eredménye egyenlő:**

$$\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=2^{2023}$$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(*) Hány páros elemszámú részhalmaza van az {1; 2; 3; …; 2024} halmaznak?

- 1. megoldás: $\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=?$
- 2. megoldás: vegyük {1; 2; 3; …; 2023} tetszőleges részhalmazát, ekkor a páros elemszámhoz a 2024 szerepe egyértelmű, ez 2^{2023}
- **Ha ugyanazt az összeszámlálási kérdést kétféleképp megoldjuk, akkor a két képlet eredménye egyenlő:**

$$\binom{2024}{0}+\binom{2024}{2}+\binom{2024}{4}+\ldots+\binom{2024}{2024}=2^{2023}$$

- (Kijön a binomiális tételből is: ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaz van, mert $(1-1)^{2024}=0$)

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(**) Bizonyítsuk be a következőt: $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}\quad\left(n\in\mathbb{Z}^{+}\right)$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(**) Bizonyítsuk be a következőt: $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}\quad\left(n\in\mathbb{Z}^+\right)$

- számolós megoldás:

$$A=0\cdot\binom{n}{0}+\qquad 1\cdot\binom{n}{1}+\qquad 2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}$$

$$A=n\cdot\binom{n}{0}+(n-1)\cdot\binom{n}{1}+(n-2)\cdot\binom{n}{2}+\ldots+0\cdot\binom{n}{n}$$

$$2A=n\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=n\cdot 2^{n}$$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(**) Bizonyítsuk be a következőt: $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}\quad\left(n\in\mathbb{Z}^+\right)$

- számolós megoldás: $A=0\cdot\binom{n}{0}+\quad 1\cdot\binom{n}{1}+\quad 2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}$

$$A=n\cdot\binom{n}{0}+(n-1)\cdot\binom{n}{1}+(n-2)\cdot\binom{n}{2}+\ldots+0\cdot\binom{n}{n}$$

$$2A=n\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=n\cdot 2^n$$

- „elegáns” megoldás: Hányféleképpen lehet egy *n*-fős társaságból kiválasztani egy bizottságot elnökkel? (oldjuk meg kétféleképp)

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(**) Bizonyítsuk be a következőt: $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}\quad \left(n\in\mathbb{Z}^+\right)$

- számolós megoldás:

$$A=0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}$$

$$A=n\cdot\binom{n}{0}+(n-1)\cdot\binom{n}{1}+(n-2)\cdot\binom{n}{2}+\ldots+0\cdot\binom{n}{n}$$

$$2A=n\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=n\cdot 2^n$$

- „elegáns” megoldás: Hányféleképpen lehet egy *n*-fős társaságból kiválasztani egy bizottságot elnökkel? (oldjuk meg kétféleképp)
- a jó kérdés (vagy a „két mese”) bizonyítja az állítást

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy $a<c$ és $b<c$ legyen?

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy a<c és b<c legyen?

- 1. út: vagy mindhárom különböző, vagy *a*=*b*: $2\cdot\binom{2024}{3}+\binom{2024}{2}$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy a<c és b<c legyen?

- 1. út: vagy mindhárom különböző, vagy *a*=*b*: $2 \cdot \binom{2024}{3} + \binom{2024}{2}$
- 2. út: először *c*-t választjuk, majd *a* és *b* is egymástól függetlenül *c-1* féle lehet: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2023^2$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy a<c és b<c legyen?

- 1. út: vagy mindhárom különböző, vagy *a*=*b*: $2\cdot\binom{2024}{3}+\binom{2024}{2}$
- 2. út: először *c*-t választjuk, majd *a* és *b* is egymástól függetlenül *c-1* féle lehet: $1^2+2^2+3^2+\ldots+2023^2$
- A kettő egyenlő, általánosan (2024 helyett *n*+1 jelöléssel):

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy a<c és b<c legyen?

- 1. út: vagy mindhárom különböző, vagy *a*=*b*: $2\cdot\binom{2024}{3}+\binom{2024}{2}$
- 2. út: először *c*-t választjuk, majd *a* és *b* is egymástól függetlenül *c-1* féle lehet: $1^2+2^2+3^2+\ldots+2023^2$
- A kettő egyenlő, általánosan (2024 helyett *n*+1 jelöléssel):

$$2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

2. KETTŐS LESZÁMLÁLÁS

(***) Hányféleképpen választhatunk ki az 1 és 2024 közötti egész számokból egy rendezett (a; b; c) számhármast úgy, hogy a<c és b<c legyen?

- 1. út: vagy mindhárom különböző, vagy *a*=*b*: $2\cdot\binom{2024}{3}+\binom{2024}{2}$
- 2. út: először *c*-t választjuk, majd *a* és *b* is egymástól függetlenül *c-1* féle lehet: $1^2+2^2+3^2+\ldots+2023^2$
- A kettő egyenlő, általánosan (2024 helyett *n*+1 jelöléssel):

$$2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x \neq -7)$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\frac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x \neq -7)$

- Azonosság alapján: $\frac{x^3+7^3}{x+7}=\frac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik" a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan") osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} \;\;408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \;\;\;\;68 \\ \;\;\underline{-68} \\ \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer: $(x^3+343):(x+7)=$

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ 68 \\ \underline{-68} \\ 0 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer: $\left(x^3+343\right):(x+7)=x^2$

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ 68 \\ \underline{-68} \\ 0 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$
\begin{array}{l}
408:17=24\\
\underline{-34}\\
\quad 68\\
\quad\underline{-68}\\
\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+343\right):(x+7)=x^2\\
-\left(x^3+7x^2\right)
\end{array}
$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \quad 68 \\ \quad \underline{-68} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3+343):(x+7)=x^2 \\ \underline{-(x^3+7x^2)} \\ \qquad -7x^2+343 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$
\begin{array}{l}
\ \ 408:17=24 \\
\underline{-34} \\
\quad 68 \\
\ \ \underline{-68} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+343\right):(x+7)=x^2-7x \\
\underline{-\left(x^3+7x^2\right)} \\
\qquad -7x^2+343
\end{array}
$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \quad 68 \\ \quad \underline{-68} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3+343):(x+7)=x^2-7x \\ \underline{-(x^3+7x^2)} \\ \qquad -7x^2+343 \\ \quad -(-7x^2-49x) \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik" a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan") osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \quad 68 \\ \quad \underline{-68} \\ \quad\ \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3+343):(x+7)=x^2-7x \\ \underline{-(x^3+7x^2)} \\ \qquad -7x^2+343 \\ \quad \underline{-(-7x^2-49x)} \\ \qquad\qquad 49x+343 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ 68 \\ \underline{-68} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3+343):(x+7)=x^2-7x+49 \\ \underline{-(x^3+7x^2)} \\ \qquad -7x^2+343 \\ \qquad \underline{-(-7x^2-49x)} \\ \qquad\qquad 49x+343 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)\left(x^2-7x+49\right)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik" a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan") osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \quad 68 \\ \underline{\;-68} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(x^3+343\right):(x+7)=x^2-7x+49 \\ \underline{-\left(x^3+7x^2\right)} \\ \qquad -7x^2+343 \\ \quad \underline{-\left(-7x^2-49x\right)} \\ \qquad\qquad 49x+343 \\ \qquad\quad -(49x+343) \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(*) Hozzuk egyszerűbb alakra: $\dfrac{x^3+343}{x+7}=?\quad (x\neq -7)$

- Azonosság alapján: $\dfrac{x^3+7^3}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x^2-7x+49)}{x+7}=x^2-7x+49$
- De: mi van, ha „nem látszik” a szorzatalak?
  El lehet-e („maradékosan”) osztani x^3+343-at $x+7$-tel?
- Régi és új módszer:

$$\begin{array}{l} 408:17=24 \\ \underline{-34} \\ \quad 68 \\ \quad \underline{-68} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3+343):(x+7)=x^2-7x+49 \\ \underline{-(x^3+7x^2)} \\ \quad -7x^2+343 \\ \quad \underline{-(-7x^2-49x)} \\ \qquad 49x+343 \\ \qquad \underline{-(49x+343)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x - 5) = ?$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x-5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x-5) =$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = x^2$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = x^2$

$$-\left(x^3 - 5x^2\right)$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3-12x^2+17x+90=0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x=5$ megoldás, $x-5$ kiemelhető: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2$

$$\begin{array}{l} \left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2 \\ \underline{-\left(x^3-5x^2\right)} \\ \quad -7x^2+17x+90 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x - 5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken:

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x - 5) = x^2 - 7x \\ \underline{-\left(x^3 - 5x^2\right)} \\ \qquad -7x^2 + 17x + 90 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3-12x^2+17x+90=0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x=5$ megoldás, $x-5$ kiemelhető: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=?$
- A fokszám 1-gyel csökken:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x \\
\underline{-\left(x^3-5x^2\right)} \\
\qquad\quad -7x^2+17x+90 \\
\qquad -\left(-7x^2+35x\right)
\end{array}
$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x-5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x-5) = x^2 - 7x$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3 - 5x^2\right)} \\
\quad -7x^2 + 17x + 90 \\
\quad \underline{-\left(-7x^2 + 35x\right)} \\
\qquad -18x + 90
\end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3-12x^2+17x+90=0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x=5$ megoldás, $x-5$ kiemelhető: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x-18$

$$\begin{array}{l}
\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x-18 \\
\underline{-\left(x^3-5x^2\right)} \\
\qquad -7x^2+17x+90 \\
\quad \underline{-\left(-7x^2+35x\right)} \\
\qquad\qquad -18x+90
\end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x - 5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right) : (x - 5) = x^2 - 7x - 18$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3 - 5x^2\right)} \\
\qquad -7x^2 + 17x + 90 \\
\quad \underline{-\left(-7x^2 + 35x\right)} \\
\qquad\qquad -18x + 90 \\
\qquad\quad -\left(-18x + 90\right)
\end{array}
$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3-12x^2+17x+90=0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x=5$ megoldás, $x-5$ kiemelhető: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x-18$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x-18 \\
\underline{-\left(x^3-5x^2\right)} \\
\qquad -7x^2+17x+90 \\
\qquad \underline{-\left(-7x^2+35x\right)} \\
\qquad\qquad -18x+90 \\
\qquad\qquad \underline{-\left(-18x+90\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3-12x^2+17x+90=0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x=5$ megoldás, $x-5$ kiemelhető: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3-12x^2+17x+90\right):(x-5)=x^2-7x-18$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3-5x^2\right)} \\
\quad -7x^2+17x+90 \\
\quad \underline{-\left(-7x^2+35x\right)} \\
\qquad -18x+90 \\
\qquad \underline{-\left(-18x+90\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\downarrow$

$x_1=5$

$x_2=-2$

$x_3=9$

3. POLINOMOSZTÁS

(**) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$

- Próbálkozás (ha egy gyök megvan, a gyöktényező kiemelhető)
- Pl. $x = 5$ megoldás, $x - 5$ kiemelhető: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = ?$
- A fokszám 1-gyel csökken: $\left(x^3 - 12x^2 + 17x + 90\right):(x-5) = x^2 - 7x - 18$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3 - 5x^2\right)} \\
\qquad -7x^2 + 17x + 90 \\
\qquad \underline{-\left(-7x^2 + 35x\right)} \\
\qquad\qquad -18x + 90 \\
\qquad\qquad \underline{-\left(-18x + 90\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\downarrow$

$x_1 = 5$

$x_2 = -2$

$x_3 = 9$

- Hogy találunk egy gyököt?
  Ha *x* egész gyök, akkor osztója a konstansnak (most a 90-nek)

3. POLINOMOSZTÁS

(***) Határozzuk meg az $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ *integrál értékét!*

3. POLINOMOSZTÁS

(***) Határozzuk meg az $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ *integrál értékét!*

- Maradékos osztás:
$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 2x^2 - 9x + 20\right) : \left(x^2 - 5x + 6\right) = x + 3 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2 - 9x + 18\right)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

3. POLINOMOSZTÁS

(***) Határozzuk meg az $\int \frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}\,dx$ *integrál értékét!*

- Maradékos osztás: $$\begin{array}{l}\left(x^3-2x^2-9x+20\right):\left(x^2-5x+6\right)=x+3\\ \underline{-\left(x^3-2x^2-9x+18\right)}\\ \hphantom{-\left(x^3-2x^2-9x+1\right.}2\end{array}$$

- Tehát $\frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}=x+3+\frac{2}{x^2-5x+6}$

3. POLINOMOSZTÁS

(***) Határozzuk meg az $\int \frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}\,dx$ *integrál értékét!*

- Maradékos osztás: $\left(x^3-2x^2-9x+20\right):\left(x^2-5x+6\right)=x+3$

$$\frac{-\left(x^3-2x^2-9x+18\right)}{2}$$

- Tehát $\frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}=x+3+\frac{2}{x^2-5x+6}$
- Parciális törtekre bontás: $\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}$

3. POLINOMOSZTÁS

(***) Határozzuk meg az $\int \frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}\,dx$ *integrál értékét!*

- Maradékos osztás: $\left(x^3-2x^2-9x+20\right):\left(x^2-5x+6\right)=x+3$

$$\begin{array}{r} -\left(x^3-2x^2-9x+18\right) \\ \hline 2 \end{array}$$

- Tehát $\frac{x^3-2x^2-9x+20}{x^2-5x+6}=x+3+\frac{2}{x^2-5x+6}$
- Parciális törtekre bontás: $\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}$
- Az integrál: $\int x+3+\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+2\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C\quad\left(C\in\mathbb{R}\right)$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ *sorozatnak?*

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Próbálkozás: $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 25,\ a_4 = 79,\ \ldots?$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ sorozatnak?

- Próbálkozás: $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 25,\ a_4 = 79,\ \ldots?$
- Észrevétel: $a_1 + 2 = 3,\ a_2 + 2 = 9,\ a_3 + 2 = 27,\ a_4 + 2 = 81,\ \ldots$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ **sorozatnak?

- Próbálkozás: $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 25,\ a_4 = 79,\ \ldots?$
- Észrevétel: $a_1 + 2 = 3,\ a_2 + 2 = 9,\ a_3 + 2 = 27,\ a_4 + 2 = 81,\ \ldots$
- Sejtés: $a_n = 3^n - 2$ (bizonyítás pl. teljes indukcióval)

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Próbálkozás: $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 25,\ a_4 = 79,\ \ldots?$
- Észrevétel: $a_1 + 2 = 3,\ a_2 + 2 = 9,\ a_3 + 2 = 27,\ a_4 + 2 = 81,\ \ldots$
- Sejtés: $a_n = 3^n - 2$ (bizonyítás pl. teljes indukcióval)
- Tehát $a_{2024} = 3^{2024} - 2$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(*) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+ \right)$ ***sorozatnak?***

- Próbálkozás: $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 25,\ a_4 = 79,\ \ldots?$
- Észrevétel: $a_1 + 2 = 3,\ a_2 + 2 = 9,\ a_3 + 2 = 27,\ a_4 + 2 = 81,\ \ldots$
- Sejtés: $a_n = 3^n - 2$ (bizonyítás pl. teljes indukcióval)
- Tehát $a_{2024} = 3^{2024} - 2$
- (De hogyan lehet megsejteni?)

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ *sorozatnak?*

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \ \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ *sorozatnak?*

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ *sorozatnak?*

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad q^2 = q + 6$$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad q^2 = q + 6$$

- A lehetséges kvóciensek: $q_1 = 3,\ \ q_2 = -2$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \to \qquad q^2 = q + 6$$

- A lehetséges kvóciensek: $q_1 = 3,\ \ q_2 = -2$
- Ötlet: ha 3^{n-1} és $(-2)^{n-1}$ jó sorozatok, akkor $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot (-2)^{n-1}$ is jó

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad q^2 = q + 6$$

- A lehetséges kvóciensek: $q_1 = 3,\ \ q_2 = -2$
- Ötlet: ha 3^{n-1} és $(-2)^{n-1}$ jó sorozatok, akkor $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot (-2)^{n-1}$ is jó
- *A* és *B* meghatározása a kezdőértékekből:

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \ \ \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ *sorozatnak?*

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad q^2 = q + 6$$

- A lehetséges kvóciensek: $q_1 = 3,\ \ q_2 = -2$
- Ötlet: ha 3^{n-1} és $(-2)^{n-1}$ jó sorozatok, akkor $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot (-2)^{n-1}$ is jó
- *A* és *B* meghatározása a kezdőértékekből:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 = A \cdot 3^0 + B \cdot (-2)^0 \\ a_2 &= 7 = A \cdot 3^1 + B \cdot (-2)^1 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3A - 2B &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad A = \frac{9}{5},\ B = -\frac{4}{5}$$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(**) Mennyi a 2024. tagja az $a_1 = 1,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$ ***sorozatnak?***

- Ötlet: először csak $a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n$, mi van, ha mértani? $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^n + 6 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad q^2 = q + 6$$

- A lehetséges kvóciensek: $q_1 = 3,\ \ q_2 = -2$
- Ötlet: ha 3^{n-1} és $(-2)^{n-1}$ jó sorozatok, akkor $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot (-2)^{n-1}$ is jó
- *A* és *B* meghatározása a kezdőértékekből:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 = A \cdot 3^0 + B \cdot (-2)^0 \\ a_2 &= 7 = A \cdot 3^1 + B \cdot (-2)^1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3A - 2B &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad A = \frac{9}{5},\ B = -\frac{4}{5}$$

- Tehát $a_n = \dfrac{9 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot (-2)^{n-1}}{5}$, így $a_{2024} = \dfrac{3^{2025} + 2^{2025}}{5}$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(***) Mennyi a 2024-edik Fibonacci-szám?

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(***) Mennyi a 2024-edik Fibonacci-szám?

- Rekurzív alak: $f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(***) Mennyi a 2024-edik Fibonacci-szám?

- Rekurzív alak: $f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$
- Az előző módszerrel: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

4. REKURZIÓK EXPLICIT ALAKRA HOZÁSA

(***) Mennyi a 2024-edik Fibonacci-szám?

- Rekurzív alak: $f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$
- Az előző módszerrel: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$
- Vagyis $f_{2024} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2024} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2024} \right)$

Köszönöm a figyelmet!